МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О. Б. Білоцерківський

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЕКОНОМІЦІ ТА МЕНЕДЖМЕНТІ

Текст лекцій

для студентів спеціальності 073 «Менеджмент»

Харків 2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О. Б. Білоцерківський

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЕКОНОМІЦІ ТА МЕНЕДЖМЕНТІ

Текст лекцій

для студентів спеціальності 073 «Менеджмент»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 30.01.2018

Харків
НТУ «ХПІ»
2018

УДК 534.1

Б 78

Рецензенти: *В.О. Шведун*, канд. екон. наук, с.н.с. НУЦЗУ;

І.А. Федоренко, докт. екон. наук, проф. НТУ «ХПІ»

Білоцерківський О. Б.

Б 78 Математичне моделювання в економіці та менеджменті : текст лекцій для студентів спеціальності 073 «Менеджмент» / О. Б. Білоцерківський – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – 90 с.

ISBN

Текст лекцій містить основи математичного моделювання в економіці та менеджменті, включаючи задачі лінійного, цілочислового, дробово-лінійного, нелінійного, квадратичного та динамічного програмування, двоїсті та транспортні задачі, елементи теорії ігор, ігри з природою та їх використання в економічних дослідженнях. Розглянуто методи розв'язування цих задач.

Призначено для студентів спеціальності 073 «Менеджмент».

Іл. 9. Табл. 4. Бібліогр. 23 назв.

УДК 534.1

ISBN

© О. Б. Білоцерківський, 2018 р.

ВСТУП

В Україні як самостійній державі зростає роль економіко-математичних методів як одного із способів розвитку динамічно розвинутої та стійкої економіки з науково обґрунтованими шляхами розвитку та прогнозами на майбутнє.

Економіко-математичні методи – це узагальнена назва комплексу економіко-математичних підходів, об’єднаних для вивчення економіки та призначених для побудови, реалізації і дослідження економічних моделей.

Математичне моделювання в економіці та менеджменті – це використання математичного моделювання в розв’язанні господарських завдань і обґрунтуванні прийнятих рішень щодо керування виробництвом.

У даному тексті лекцій викладаються теоретичні основи курсу «Математичне моделювання в економіці та менеджменті», включаючи задачі лінійного, цілочислового, дробово-лінійного, нелінійного, квадратичного та динамічного програмування, двоїсті та транспортні задачі, елементи теорії ігор, ігри з природою та їх використання в економічних дослідженнях. Текст лекцій складається з двох змістовних модулів: 1) задачі лінійного програмування (теми 1−7); 2) задачі нелінійного програмування (теми 8−12). Докладно розглянуто методи розв’язування цих задач. Наприкінці кожної теми наведено контрольні запитання для перевірки знань студентів.

Цей текст лекцій розрахований на студентів спеціальності 073 «Менеджмент», що вивчають курс «Математичне моделювання в економіці та менеджменті». Він також буде корисний для студентів інших економічних спеціальностей.

ТЕМА 1. КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В ЕКОНОМІЦІ ТА МЕНЕДЖМЕНТІ

1.1. Предмет, мета, завдання та основні поняття математичного моделювання в економіці та менеджменті

Предметом математичного моделювання є методологія та інструментарій побудови і розв'язування детермінованих оптимізаційних задач.

Мета – формування системи знань з методології та інструментарію побудови і використання різних типів економіко-математичних моделей.

Завдання – вивчення основних принципів та інструментарію постановки задач, побудови економіко-математичних моделей, методів їх розв'язування та аналізу з метою використання в економіці та менеджменті.

Основні поняття математичного моделювання в економіці та менеджменті

Мета – це фундаментальне поняття, тому що економічна діяльність завжди цілеспрямована. Під метою розуміють бажаний результат, що повинний бути досягнутий.

Захід – сукупність дій, об'єднаних загальною метою. В дослідженні операцій (відгалуженні кібернетики) замість терміну «захід» використовується поняття «операція».

Альтернативи – можливі варіанти заходів, на підставі яких приймається рішення. Таких варіантів може бути декілька. Альтернативи можуть бути дискретними або безперервними. Кількість дискретних альтернатив скінченна: наприклад, замінити певний вид устаткування або ні (у даному випадку альтернативи дві). Альтернативи можуть вибиратися на безперервній множині: наприклад, коли необхідно замінити устаткування даного виду (через день, два, тиждень, місяць, рік і т.д.), тоді кількість альтернатив нескінченна і під рішенням розуміють вибір однієї альтернативи з безліч можливих.

Система (у перекладі з грецької – ціле, складене з частин) – це множина взаємозв'язаних елементів, які становлять певну єдність.

Елемент системи – частина системи, яка виходячи з мети та функцій даної системи є неподільною.

Складна система – це безліч різних структур і елементів цих структур.

Підсистема – частина системи, яка виділена з певною метою, може розглядатися як самостійна система.

Системний підхід – головний науковий принцип дослідження систем, згідно з яким необхідно враховувати взаємозв'язки між елементами системи, між системою та зовнішнім середовищем, між станом системи у даний час і у майбутньому. Основне поняття в кібернетиці.

Модель – система, здатна замінити оригінал (тобто реальну систему) так, що її вивчення дає інформацію про оригінал. Модель може повністю або частково відтворювати структуру системи, що моделюється, та її функції.

Моделювання – процес побудови, реалізації та дослідження моделі, який здатний замінити реальну систему та дати інформацію про неї.

Математична модель – система математичних і логічних співвідношень, які описують структуру та функції реальної системи. Математична модель відрізняється за своєю природою від оригіналу. Дослідження властивостей оригіналу за допомогою математичної моделі зручніше, дешевше, забирає менше часу порівняно з фізичним моделюванням, яке використовується в техніці (тобто має ту ж природу, що і оригінал). Більш того, цілий ряд економічних систем неможливо зобразити за допомогою фізичних моделей.

Економіко-математична модель – це математичний опис економічного процесу чи явища з метою його дослідження та керування. Вона включає в себе систему рівнянь та нерівностей математичного опису економічних процесів і явищ, які складаються з набору змінних і параметрів. *Змінні величини* характеризують, наприклад, обсяг виробленої продукції, капітальних вкладень, перевезень тощо. Змінні поділяються на дві групи: *пояснювальні* (залежні), які є наперед заданими та незалежними, *пояснювані* (незалежні), які є результативними показниками. Змінні величини можуть бути двох груп: *зовнішні змінні (екзогенні),* коли вони визначаються поза даною моделлю та вважаються для моделі заданими, *внутрішні змінні (ендогенні),* які визначаються в результаті дослідження даної моделі. *Параметри* – це чисельні ознаки показників, такі, як норми витрат сировини, матеріалів, часу на виробництво тощо. В усіх випадках необхідно, щоб модель мала достатньо детальний опис об'єкта, який дозволяв би здійснювати вимір економічних величин та їх взаємозв'язок, щоб були виділені фактори, які впливають на досліджувані показники.

Оптимізаційна модель дозволяє з декількох альтернативних варіантів вибрати найкращий варіант за будь-якою ознакою.

Економіко-математичні методи – узагальнена назва комплексу економіко-математичних підходів, об'єднаних для вивчення економіки та призначених для побудови, реалізації і дослідження економічних моделей.

1.2. Історія розвитку економіко-математичних методів

XVIII ст. – початок використання математичних методів в економіці – опублікування роботи *«Економічні таблиці»* французьким економістом *Ф. Кене*, який вперше зробив спробу формалізації процесу суспільного відтворення. В подальшому наукове обґрунтування суспільного відтворення було здійснено *К. Марксом.*

XIX ст. – *формується економетрія* як наука з початку розробки *статистичних методів* у вигляді парної та множинної регресії, теорії кореляції, теорії помилок, вибіркових методів *(Р. Гамільтон, К. Пірсон, Р. Фішер та ін.).*

У середині 30–40-х років XX ст. виникають лінійні методи оптимізації: *лінійне програмування,* скорочено ЛП *(Л.В. Канторович, Дж. Данциг)* та *теорія ігор (Дж. фон Нейман).*

Досвід використання лінійних моделей показав, що вони далеко не завжди можуть бути використані для опису економічних процесів і явищ. Тому починають розвиватися дослідження в інших напрямках *нелінійного програмування:* випуклого, геометричного, динамічного та ін.

У 1948 р. виникає нова наука – *кібернетика* (у перекладі з грецької – мистецтво керування), засновником якої став американський математик *Норберт Вінер. Кібернетика* – це наука про загальні закономірності процесів керування в різних системах: біологічних, економічних, технічних та ін. Одним з напрямків кібернетики, об'єктом якого постають економічні системи, є *економічна кібернетика.* Вона лежить в основі побудови ряду оптимізаційних моделей. Пізніше розвиваються такі прикладні напрямки економічної кібернетики, як *дослідження операцій* (пошук шляхів раціонального використання ресурсів для реалізації поставлених цілей), *теорія масового обслуговування* (яка розглядає різні явища в економіці – процеси обслуговування, тобто задовільнення будь-яких запитів, замовлень тощо).

У 50–60-х роках *макроекономічні дослідження в економетрії* проводять *Я. Тінберген, Р. Фріш.* Центром розвитку економетрії стала Комісія Коулса (США). Новий інструментарій економетрія одержала в результаті розробки моделей *одночасних рівнянь (Т. Хаавельмо, Т. Купманс, Г. Гейл та ін.).* Серед нових економетричних систем, за якими розрахунки починають вестись з використанням ЕОМ, виникають такі макроекономічні моделі: *Брукінгська модель (США), Голландська модель, Уортонська модель (США)*, які використовуються для прогнозування та розробки економічної політики, для аналізу попиту та споживання.

У 60-х роках починається впровадження у практику планування СРСР нових методів, які одержали назву *«мережеві методи планування та управління»* (МПУ). Вони лежать в основі мережевих моделей.

Набувають розвитку деякі розділи прикладної математики, які пов'язані з розв'язуванням оптимізаційних задач: *нелінійне математичне програмування, математична теорія оптимізаційних процесів.*

Відповідний внесок у розвиток економетрії роблять *вітчизняні вчені-економісти (Є.Є. Слуцький, Л.В. Канторович, В.С. Немчинов та ін.).* Так, акад. В.С. Немчинову належить значна роль у реабілітації в СРСР існуючого погляду на економетрію як «буржуазну», «антимарксистську» та «шкідливу лженауку» (1965 р.).

У 70–90-х роках економіко-математичне моделювання стало визнаним способом аналізу економічних проблем. У вітчизняній практиці у 70-х роках з'являються *автоматизовані системи управління (АСУ)*, призначені для оптимізації керування складними виробничими процесами та економічними системами.

У наш час набувають упровадження у вітчизняну практику *економетричні підходи з використанням програмних комплексів ПК.* В Україні як самостійній державі зростає роль економіко-математичних методів як одного із способів розвитку динамічно розвинутої та стійкої економіки з науково обґрунтованими шляхами розвитку та прогнозами на майбутнє.

1.3. Сучасний стан математичного моделювання в економіці та менеджменті

У теперішній час сфера можливого використання економіко-математичних методів і моделей у плануванні та керуванні значна і з кожним роком вона розширюється, але область їх фактичного використання на практиці пов'язана з такими *труднощами:*

✓ ***складність моделювання*** економічних процесів і явищ з урахуванням виробничих відносин (поведінка людей, їх інтереси, індивідуально прийняті рішення);

✓ ***необхідність «вбудовування»*** математичних моделей в існуючу систему планування та керування;

✓ ***труднощі перевірки*** у вирішенні нових соціально-економічних задач тощо.

До ефективних *засобів подолання цих труднощів* можна віднести такі:

✓ ***імітаційне моделювання***, що дає змогу керівнику, який приймає рішення, за допомогою ПК включитися у процес побудови економіко-математичної моделі з прийняттям оптимального рішення на її основі (головний принцип імітаційного моделювання: «Що буде, коли...»);

✓ ***системний аналіз***, який припускає комплексне проведення дослідження економічних процесів з урахуванням усіх існуючих елементів та взаємозв'язків, вивчення окремих господарських об'єктів як структурних частин більш загальних систем, виявлення ролі кожного з них у функціонуванні економічного процесу в цілому;

✓ ***програмно-цільовий метод планування***, базований на формуванні цілей та підцілей економічного розвитку, на які треба направити найбільші сили і засоби, та на розробленні програм їх досягнення.

1.4. Класифікація економіко-математичних моделей

Економіко-математичні моделі можна класифікувати за *такими ознаками:*

1) призначенням;

2) ступенем ймовірності;

3) способом опису;

4) способом обліку змінювання процесу за часом;

5) точністю математичного відображення явищ, що розглядаються.

За ***призначенням*** моделі доцільно розподілити на чотири класи: *імітаційні*, *балансові*, *сіткові*, *оптимізаційні*.

За ***ступенем ймовірності*** моделі поділяються на два типи: *ймовірні (стохастичні),* параметри яких та зовнішні зміни мають випадковий характер; *детерміновані*, в яких ігнорується випадковий характер зміни параметрів.

За ***способом опису*** моделі поділяють на три класи: *аналітичні*, в яких показники описуються математичними формулами або системою формул; *еконо-*

метричні (статистичні), які призначені для аналізу і прогнозування економічних явищ, що розглядаються, в умовах невизначеності вхідних даних і реалізуються методами математичної статистики; *змішані*, в яких найбільш прості блоки описуються аналітичними залежностями, а в інших блоках, де опис аналітичними формулами може призвести до значних викривлень, використовується економетричне моделювання.

За ***способом обліку змінювання процесу за часом*** моделі поділяються на три класи: *статичні, у* яких передбачається, що вхідні параметри не змінюються за часом; *багатокрокові*, у яких час проходження процесу ділиться на «кроки» (інтервали) і в рамках одного кроку процес розглядається статичним; *динамічні*, де враховується безперервна зміна часу.

За ***точністю математичного відображення явищ, що розглядаються***, моделі ділять на дві групи: *лінійні*, залежності в яких мають змінні першого степеня та не включають їх обернених величин і добуток змінних; *нелінійні.*

1.5. Етапи економіко-математичного моделювання

Процес побудови економіко-математичних моделей загального типу складається з таких взаємозв’язаних етапів:

Перший етап – постановка задачі, де формується мета запланованого заходу, ставляться задачі дослідження, проводиться якісний опис об’єкта.

Другий етап – розробка описувальної моделі, де формулюються та обґрунтовуються показники і система основних припущень.

Третій етап – розробка математичної моделі об’єкта, що вивчається, з вибором методів дослідження, програмного забезпечення ПК або складання алгоритму та програми для ПК за новими завданнями.

Четвертий етап – розв’язання задачі на базі розробленої моделі, яке складається з реалізації пакета прикладних або розроблених програм для ПК.

П’ятий етап – перевірка та підстроювання моделі, тобто встановлення відповідності моделі описаному економічному процесу.

Шостий етап – подання результатів розв’язання у формі, зручній для вивчення, аналіз матеріалів моделі на основі обробки результатів.

Контрольні запитання

1. Що є предметом і метою математичного моделювання в економіці та менеджменті?

2. Наведіть завдання та основні поняття математичного моделювання в економіці та менеджменті.

3. Розкрийте основні етапи розвитку економіко-математичних методів.

4. Охарактеризуйте сучасний стан економіко-математичного моделювання.

5. Наведіть класифікацію економіко-математичних моделей.

6. Які існують етапи економіко-математичного моделювання?

ТЕМА 2. ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Лінійне програмування (ЛП) є одним з розділів математичного програмування.

ЛП – це наука про методи дослідження та пошуку оптимальних значень лінійної функції, на невідомі якої накладені лінійні обмеження.

2.1. Модель загальної задачі лінійного програмування

Загальна задача ЛП полягає у знаходженні екстремуму (максимуму або мінімуму) лінійної цільової функції при наявності обмежень на n змінних у вигляді m лінійних нерівностей або рівнянь та умов невід'ємності змінних. Економіко-математична модель загальної задачі ЛП формулюється таким чином.

Нехай є система m лінійних рівнянь і нерівностей з n змінними

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k; \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + ... + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}; \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + ... + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2}; \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.1)$$

і лінійна функція

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n. \qquad (2.2)$$

Необхідно знайти такий розв'язок системи $X = (x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$*, де*

$$x_j \ge 0 \; (j = 1, 2, ..., l; \; l \le n), \qquad (2.3)$$

при якому лінійна функція F (2.2) *набуває оптимального (тобто максимального або мінімального) значення.*

Система (2.1) називається *системою обмежень*, а функція F – *лінійною функцією, лінійною формою, цільовою функцією*, або *функцією мети*.

Більш стисло загальну задачу лінійного програмування можна подати у вигляді:

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (\text{або} \to \min)$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i=1,2,...,k); \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i=k+1,k+2,...,m), \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \; (j=1,2,...,l;\, l \le n).$$

Оптимальним розв'язком (або *оптимальним планом*) задачі лінійного програмування називається розв'язок $X=(x_1,x_2,...,x_j,...,x_n)$ системи обмежень (2.1), що задовольняє умову (2.3), і при цьому лінійна функція (2.2) набуває оптимального (максимального або мінімального) значення.

Терміни «розв'язок» і «план» – синоніми, однак перший використовується частіше, коли мова йде про формальну сторону задачі (її математичний розв'язок), а другий – про змістовну сторону (економічну інтерпретацію).

За умови, що всі змінні невід'ємні $x_j \ge 0 \; (j=1,2,...,n)$, система обмежень (2.1) складається лише з одних нерівностей, така задача лінійного програмування називається *стандартною*, якщо система обмежень складається з одних рівнянь, то задача називається *канонічною*. Будь-яка задача лінійного програмування може бути зведена до канонічної, стандартної або загальної задачі. Розглянемо спочатку допоміжну теорему.

Теорема 2.1. Усякому розв'язку нерівності $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$

$$\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+...+\alpha_{in}x_n \le b_i \tag{2.4}$$

відповідає певний розв'язок $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n;\alpha_{n+i})$ рівняння

$$\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+...+\alpha_{in}x_n+x_{n+i}=b_i, \tag{2.5}$$

у якому

$$x_{n+i} \ge 0, \tag{2.6}$$

і, навпаки, кожному розв'язку $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n;\alpha_{n+i})$ рівняння (2.5) і нерівності (2.6) відповідає певний розв'язок $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ нерівності (2.4).

Примітка. У розглянутій теоремі всі нерівності вигляду «≤», тому додаткові невід'ємні змінні вводяться зі знаком «+». У випадку нерівності вигляду «≥» додаткові змінні варто було б увести зі знаком «–».

Існує ще 2 види форми запису канонічної задачі: матрична та векторна.

Матрична форма запису:

$$F = CX \to \max \quad (\min) \tag{2.7}$$

При обмеженнях

$$AX = B; \tag{2.8}$$

$$X \geq 0, \tag{2.9}$$

де $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$.

Тут C – матриця-рядок, A – матриця системи, X – матриця-стовпець змінних, B – матриця-стовпець вільних членів.

Векторна форма запису:

$$F = CX \to \max \quad (\min) \tag{2.10}$$

При обмеженнях

$$P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_nx_n = P; \tag{2.11}$$

$$X \geq 0, \tag{2.12}$$

де CX – скалярний добуток векторів $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ і $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, вектори P_1, P_2, P_n, P складаються відповідно з коефіцієнтів при змінних і вільних членів:

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix}, ..., \quad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Векторна нерівність $X \geq 0$ означає, що всі компоненти вектора X невід'ємні, тобто $x_j \geq 0, \ j = 1,2,...,n.$

Скалярним добутком двох векторів $C=(c_1,c_2,...,c_n)$ *і* $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ *називається число, що дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів, тобто* $CX=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$.

Правила зведення будь-якої лінійної задачі до канонічної форми:

1. Від задачі на максимум цільової функції мети до еквівалентної задачі на мінімум можна перейти, використовуючи формулу $\max Z=-\min(-Z)$.

2. Якщо права частина основного обмеження невід'ємна, то це обмеження слід помножити на (–1).

3. Нерівності в еквівалентні рівняння слід перетворювати за допомогою додаткових змінних. Невід'ємна змінна називається *додатковою*, якщо вона з коефіцієнтом +1 або –1 уводиться в ліву частину нерівності.

Обмеження-нерівність початкової задачі лінійного програмування, яке має вигляд ≤, можна перетворювати в обмеження-рівняння, додаючи до його лівої частини додаткову невід'ємну змінну, а обмеження-нерівність типу ≥ – в обмеження-рівняння, віднімаючи з його лівої частини додаткову невід'ємну змінну. *Число введених змінних дорівнює числу перетворених нерівностей у рівняння.*

2.2. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування. Елементи геометрії опуклих множин

Множина точок називається опуклою, якщо вона разом з будь-якими двома своїми точками містить увесь відрізок, що з'єднує ці точки. Згідно із цим визначенням багатокутник на рис. 2.1, *а* є опуклою множиною, а багатокутник на рис. 2.1, *б* не є таким, оскільки відрізок *MN* між двома його точками *M* і *N* не повністю належить цьому багатокутнику.

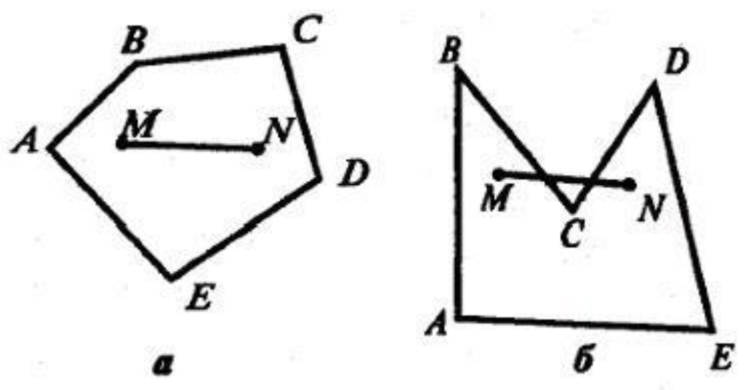

Рисунок 2.1

Прикладами опуклих множин є коло, сектор, відрізок, багатокутна область, куб, піраміда і т.д. *Опуклі множини мають властивість, яка встановлюється такою теоремою.*

Теорема 2.2. *Перетин (спільна частина) будь-якого числа опуклих множин є опукла множина.*

Доведення (для доведення теореми обмежимося випадком двох множин):

Нехай M і N – будь-які дві точки перетину двох множин A і B (рис. 2.2).

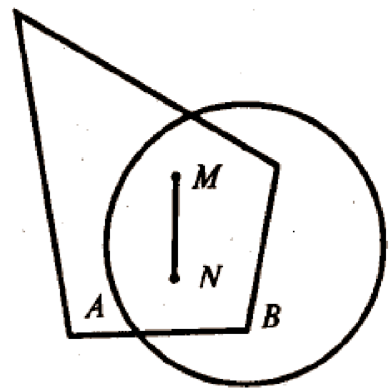

Рисунок 2.2

Оскільки точки M і N належать перетину множин, тобто одночасно опуклій множині A і опуклій множині B, то згідно з визначенням опуклої множини всі точки відрізка MN будуть належати як множині A, так і множині B, тобто перетину цих множин. А це й означає, що перетин цих множин і є опуклою множиною.

Серед точок опуклої множини можна виділити внутрішні, межові та кутові точки.

Точка множини називається *внутрішньою* (точка *M* на рис. 2.3), якщо в деякому її околі містяться точки тільки даної множини. Під околом точки (простору) мають на увазі коло (кулю) із центром у цій точці.

Точка множини називається *межовою* (точка *N* на рис. 2.3), якщо в будь-якому її околі містяться як точки, що належать даній множині, так і точки, що не належать їй.

Точка множини називається *кутовою* (або *крайньою*) (точки *A, B, C, D, E* на рис. 2.3), якщо вона не є внутрішньою для жодного відрізка, що цілком належить даній множині. Для опуклої множини кутові точки завжди збігаються з вершинами багатокутника, тоді як для неопуклої множини це необов'язково.

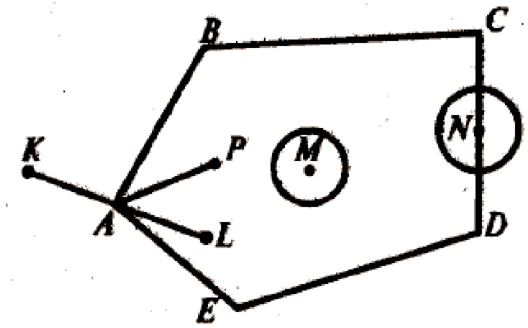

Рисунок 2.3

Множина точок називається *замкненою*, якщо вона включає всі свої межові точки. Множина точок називається *обмеженою*, якщо існує куля (коло) радіуса кінцевої довжини із центром у будь-якій точці множини, який повністю містить у собі дану множину, а якщо ні, то множина називається *необмеженою*.

Якщо фігура обмежена тільки прямими або їх відрізками, то число її кутових точок обмежене; у випадку криволінійності меж фігура містить нескінченно багато кутових точок.

Аналітично точка опуклої множини зображується впорядкованою парою чисел (x_1, x_2) або впорядкованою трійкою чисел (x_1, x_2, x_3). Поняття точки можна узагальнити, припускаючи під *точкою* (або *вектором*) упорядкований набір *n* чисел $X = (x_1, x_2, .., x_n)$, у якому числа $x_1, x_2, .., x_n$ називаються *координатами точки* (*вектора*). Наприклад, для характеристики якого-небудь економічного об'єкта двох-трьох чисел буває недостатньо, і необхідно взяти n чисел, де $n > 3$.

Множина усіх точок $X = (x_1, x_2, .., x_n)$ *утворює n-вимірний точковий (векторний) простір.*

При побудові областей розв'язків систем нерівностей можуть зустрітися й інші випадки: *безліч розв'язків* – опукла багатокутна область (рис. 2.4, *а*); *одна точка* (рис. 2.4, *б*); *порожня множина*, коли система нерівностей несумісна (рис. 2.4, *в*).

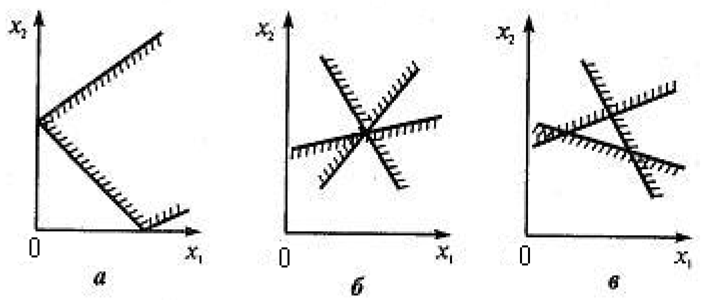

Рисунок 2.4

2.3. Приклади задач лінійного програмування і сформованих на їх основі оптимізаційних моделей

2.3.1. ***Задача про використання ресурсів (задача планування виробництва).*** Нехай при випуску n видів продукції використовується m видів ресурсів.

Позначимо x_j (j = 1, 2, ..., n) – число одиниць продукції P_j, запланованої до виробництва, b_i (i =1, 2, ..., n) – запас ресурсу S_i, a_{ij} – число одиниць ресурсу S_i, що витрачається на виготовлення одиниці продукції P_j (числа a_{ij} часто називають технологічними коефіцієнтами), c_j – прибуток від реалізації одиниці продукції P_j.

Тоді економіко-математична модель задачі про використання ресурсів у загальній постановці набуває вигляду: знайти такий план $X = (x_1, x_2,..., x_n)$ випуску продукції, що задовольняє системі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{2.13}$$

і умові

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,..., x_n \ge 0, \tag{2.14}$$

при якому функція

$$F = c_1 x_1 + c_2x_2+...+ c_nx_n \qquad (2.15)$$

набуває максимального значення.

2.3.2. ***Задача складання раціону (задача про дієту; задача про суміші).*** Нехай при відгодівлі тварин використовується n видів кормів, що містять m поживних речовин. Позначимо: x_j (j = 1, 2, ..., n) – число одиниць корму n-го виду, b_i (i =1, 2, ..., m), – необхідний мінімум змісту в раціоні живильної речовини S_i, a_{ij} – число одиниць поживної речовини S_i в одиниці корму j-го виду, c_j – вартість одиниці корму j-го виду. Тоді економіко-математична модель задачі набуває вигляду:

знайти такий раціон $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняє системі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m \end{cases} \qquad (2.16)$$

і умові

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0, \qquad (2.17)$$

при якому функція

$$F = c_1 x_1 + c_2x_2+...+ c_nx_n \qquad (2.18)$$

набуває мінімального значення.

2.3.3. ***Задача про використання потужностей (задача про завантаження устаткування).*** Підприємству заданий план виробництва продукції за часом і номенклатурою: потрібно за час T випустити $n_1, n_2,...n_k$ одиниць продукції $P_1, P_2, ..., P_K$. Продукція виробляється на верстатах $S_1, S_2, ..., S_m$. Для кожного верстата відомі продуктивність a_{ij} (тобто число одиниць продукції P_j, яке можна зробити на верстаті S_i) і витрати b_{ij} на виготовлення продукції P_j на верстаті S_i в одиницю часу.

Необхідно скласти такий план роботи верстатів (тобто так розподілити випуск продукції між верстатами), щоб витрати на виробництво всієї продукції були мінімальними.

Розв’язання. Складемо економіко-математичну модель задачі.

Позначимо x_{ij} – час, протягом якого верстат S_i буде зайнятий на виготовлення продукції P_j (i= 1, 2,..., m, j = 1, 2, ..., k).

Оскільки час роботи кожного верстата обмежений й не перевищує T, то правдиві нерівності:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1k} \le T; \\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{2k} \le T; \\ .... \\ x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mk} \le T. \end{cases} \quad (2.19)$$

Для виконання плану випуску за номенклатурою необхідно, щоб виконувалися такі рівняння:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + ... + a_{m1}x_{m1} = n_1; \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + ... + a_{m2}x_{m2} = n_2; \\ .... \\ a_{1k}x_{1k} + a_{2k}x_{2k} + ... + a_{mk}x_{mk} = n_k. \end{cases} \quad (2.20)$$

Крім того,

$$x_{ij} \ge 0 \; (i = 1,2,..., m; \; j = 1,2,..., k). \quad (2.21)$$

Витрати на виробництво всієї продукції будуть виражені функцією

$$F = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + \ldots + b_{mk}x_{mk}... \quad (2.22)$$

Економіко-математична модель задачі про використання потужностей набуде вигляду: знайти такий розв’язок $X = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{mk})$, що задовольняє системам (2.19) і (2.20) і умові (2.21), і при цьому функція (2.22) набуває мінімального значення.

2.3.4. *Задача про розкрій матеріалів*

На розкрій (розпил, обробку) надходить матеріал одного зразка в кількості a одиниць. Потрібно виготовити з нього l різних комплектуючих виробів у кількостях, пропорційних числам b_1, b_2, ...b_l (умова комплектності). Кожна одиниця матеріалу може бути розкроєна n різними способами, причому використання i-го способу (i = 1, 2, ..., n) дає a_{ik} одиниць k-го виробу (k = 1, 2, ..., l).

Необхідно знайти план розкрою, що забезпечує максимальне число комплектів.

Складемо економіко-математичну модель задачі.

Позначимо x_i – число одиниць матеріалу, що розкроюють i-м способом, і x – число комплектів виробів, що виготовляються.

Оскільки загальна кількість матеріалу дорівнює сумі його одиниць, що розкроюють різними способами, то

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a. \tag{2.23}$$

Вимога комплектності виразиться рівняннями

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ik} = b_k x. \; (k = 1, 2, ..., l). \tag{2.24}$$

Очевидно, що

$$x_i \geq 0 \; (i = 1, 2, ..., n). \tag{2.25}$$

Економіко-математична модель задачі: знайти такий розв'язок $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняє системі рівнянь (2.23) − (2.24) і умові (2.25) і при цьому функція $F = x$ набуває максимального значення.

Завдання про розкрій легко узагальнити на випадок m матеріалів, що розкроюються.

Нехай кожна одиниця j-го матеріалу (j = 1, 2, …, m) може бути розкроєна n різними способами, причому використання i-го способу (i = 1, 2, ..., n) дає a_{ijk} одиниць k-го виробу (k = 1, 2, ..., l), а запас j-го матеріалу дорівнює a_j одиниць.

Позначимо x_{ij} – число одиниць j-го матеріалу, що розкривається i-м способом.

Економіко-математична модель задачі про розкрій у загальній постановці набуває вигляду: знайти такий розв'язок $X = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{nm})$, що задовольняє системі

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq a_j & (j = 1, 2, ..., m) \\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} a_{ijk} = b_k x & (k = 1, 2, ..., l) \end{cases}$$

і умові $x_{ij} \geq 0$, при якій функція $F = x$ набуває максимального значення.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте загальну задачу лінійного програмування. У чому суть стандартної та канонічної задач?

2. Що називається оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування? Як він пов'язаний з оптимальним планом?

3. Які існують форми запису канонічної задачі?

4. Наведіть правила зведення будь-якої лінійної задачі до канонічної форми.

5. Що називається опуклою множиною? Яку вона має властивість?

6. Класифікуйте точки опуклої множини.

7. Наведіть формулювання та математичну модель задачі про використання ресурсів.

8. Наведіть формулювання та математичну модель задачі складання раціону.

9. Наведіть формулювання та математичну модель задачі про використання потужностей.

10. Наведіть формулювання та математичну модель задачі про розкрій матеріалів.

ТЕМА 3. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

3.1. Графічний метод

Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування (ЗЛП) базується на їхній геометричній інтерпретації й аналітичних властивостях і застосовується, як правило, при розв'язуванні ЗЛП при $n = 2$ і в окремих випадках при $n = 3$, оскільки дуже важко побудувати багатогранник розв'язків, що утвориться в результаті перетину напівплощин. ЗЛП при $n > 3$ зобразити геометрично взагалі неможливо.

Розглянемо ЗЛП при $n = 2$ і розв'яжемо її графічним методом.

Знайти екстремум (max, min) функції:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max (\min) \tag{3.1}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\le, =, \ge\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{\le, =, \ge\} b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\le, =, \ge\} b_m, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{3.3}$$

Припустимо, що система (3.2) за умов (3.3) сумісна й багатокутник її розв'язків обмежений. Відповідно до геометричної інтерпретації ЗЛП кожне i-те обмеження-нерівність (3.2) визначає напівплощину з межовою прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i\ (i = \overline{1, m})$. Системою обмежень (3.2) описується спільна частина або перетин усіх зазначених напівплощин, тобто множина точок, координати яких задовольняють усім обмеженням (3.2).

Умова невід'ємності змінних (3.3) означає, що область допустимих розв'язків задачі належить першому квадранту системи координат двовимірного простору. Цільова функція (3.1) геометрично інтерпретується як сімейство паралельних прямих $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$.

З урахуванням властивостей розв'язків ЗЛП розв'язати ЗЛП графічно означає знайти таку вершину багатокутника розв'язків, у результаті підстановки координат якої в (3.1) лінійна цільова функція набуде max (min).

Алгоритм графічного методу розв'язування ЗЛП

1. Побудуємо прямі лінії, рівняння яких одержимо заміною в обмеженнях (3.2) знаків нерівностей на знаки рівностей.

2. Визначимо напівплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.

3. Знайдемо багатокутник розв'язків ЗЛП.

4. Побудуємо вектор $\overline{N} = (c_1; c_2)$, що задає напрямок зростання значень цільової функції задачі.

5. Побудуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, перпендикулярну до вектора $\overline{N} = (c_1; c_2)$.

6. Переміщуючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ у напрямку вектора $\overline{N} = (c_1; c_2)$ (для задачі максимізації) або у протилежному напрямку (для задачі мінімізації), знайдемо вершину багатокутника розв'язків (останню спільну точку графіка цільової функції й ОДР), де цільова функція досягає екстремального значення.

7. Визначимо координати точки, у якій цільова функція досягає максимального (мінімального) значення, й обчислимо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

Переваги графічного методу розв'язування задач лінійного програмування полягають у тому, що він простий, наочний, дозволяє швидко й легко одержати відповідь.

Проте він має такі ***недоліки***:

1. Можливі «технічні» похибки, які неминуче виникають при наближеній побудові графіків.

2. Багато величин, що мають чіткий економічний зміст (такі, як залишки ресурсів виробництва, надлишок поживних речовин і т.п.), не виявляються при графічному розв'язуванні задач.

3. Найголовнішим є те, що графічний метод неприйнятний для розв'язування практичних задач. Його можна застосувати тільки в тому випадку, коли кількість змінних у стандартній задачі дорівнює двом. Тому необхідні аналітичні методи, що дозволяють розв'язувати задачі лінійного програмування з будь-якою кількістю змінних і виявити економічний зміст вхідних у них величин.

3.2. Симплекс-метод

3.2.1. *Зведення загальної ЗЛП до канонічної форми*

Графічний метод для визначення оптимального плану задачі лінійного програмування доцільно застосовувати, як правило, тільки для задач із двома змінними. При більшій кількості змінних звертаються до загального методу розв'язання задач лінійного програмування – так званого **симплекс-методу**. Слід зауважити, що він адаптований до розв'язування ЗЛП у канонічній формі. У випадку, якщо ЗЛП подана не в канонічній формі, для застосування симплекс-методу необхідно попередньо її звести до такої форми ЗЛП (підрозділ 2.1).

3.2.2. *Симплекс-метод розв'язування ЗЛП*

Процес розв'язування задачі симплекс-методом має ітераційний характер: обчислювальні процедури (ітерації) того самого типу повторюються в певній послідовності доти, доки не буде отриманий оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує.

З властивостей розв'язків ЗЛП випливає, що за умови існування оптимальний розв'язок знаходиться у крайній точці багатогранника розв'язків. Кожній такій точці відповідає опорний план, який визначається системою m лінійно незалежних векторів, що знаходяться серед векторів A_1, A_2, ..., A_n. Для знаходження оптимального плану достатньо досліджувати лише опорні плани. Кількість опорних планів може дорівнювати числу комбінацій без повторень C_m^n. При більших значеннях m і n знайти оптимальний план ЗЛП, перебираючи всі опорні плани, досить важко. Тому необхідно мати таку схему, що дозволяє здійснювати впорядкований перехід від одного опорного плану до іншого. Такою схемою і є *симплекс-метод*, що дозволяє за кінцеву кількість кроків, виходячи з відомого опорного плану, одержати оптимальний план. Кожний із кроків полягає у знаходженні такого опорного плану, у якому значення цільової функції краще, ніж на попередньому кроці.

Отже, ***симплекс-метод*** – це поетапна обчислювальна процедура, в основі якої лежить принцип послідовного поліпшення значень цільової функції за рахунок цілеспрямованого переходу від одного опорного плану ЗЛП до іншого.

Алгоритм розв'язування ЗЛП симплекс-методом складається з таких етапів.

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

2. Побудова симплексної таблиці.

3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок $Z_j - C_j$. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок $Z_j - C_j$ не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.

4. Перехід до нового опорного плану задачі виконується визначенням розв'язуючого елементу й розрахунком нової симплексної таблиці.

5. Повторення дій, починаючи з п. 3.

Розглянемо *докладніше* кожний з етапів алгоритму.

1-й етап. Визначення першого опорного плану починають із запису ЗЛП у канонічній формі. Після зведення задачі до канонічного вигляду її записують у векторній формі.

За визначенням опорного плану ЗЛП його утворять m одиничних лінійно незалежних векторів, які становлять базис m-вимірного простору (де m – кількість обмежень у ЗЛП).

На цьому етапі розв'язування задачі можливі такі випадки:

✓ після запису задачі у векторній формі в системі обмежень є необхідна кількість одиничних векторів. Тоді початковий опорний план визначається безпосередньо без додаткових дій і являє собою вектор B;

✓ у системі обмежень немає необхідної кількості одиничних незалежних векторів. Тоді для побудови першого опорного плану застосовують ***метод штучного базису***, аналізу якого присвячений п. 3.3.

Визначені одиничні лінійно незалежні вектори, які утворюють базис, і змінні задачі, що відповідають їм, називають ***базисними***. Всі інші змінні – ***вільні***, їх прирівнюють до нуля й з кожного обмеження задачі визначають значення базисних змінних. У такий спосіб одержують початковий опорний план задачі лінійного програмування.

2-й етап. Подальший обчислювальний процес і перевірку опорного плану на оптимальність подають у вигляді симплексної табл. 3.1.

Таблиця 3.1

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план B	c_1	c_2	…	c_n	$\theta = b_i / a_{ik}$
				x_1	x_2	…	x_n	
1	x_1	c_1	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	
2	x_2	c_2	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	
…	…	…	…	…	…	…	…	
m	x_m	c_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	
$m+1$	$\Delta_j = Z_j - C_j$		$\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$	$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i1} - C_1$	Δ_2	…	Δ_n	

У першому стовпці i табл. 3.1 визначається кількість m базисних змінних.

У другому стовпці табл. 3.1 – «Базис» – записують вектори A_j, які знаходяться біля базисних змінних у системі обмежень ЗЛП у векторній формі, причому в тій послідовності, у якій вони розміщаються в системі обмежень задачі.

У третьому стовпці симплексної табл. 3.1 − «$C_{баз}$» − записуються коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції задачі.

Четвертий стовпець табл. 3.1 − опорний план ЗЛП.

В інших стовпцях симплексної табл. 3.1, кількість яких відповідає кількості змінних задачі, записують відповідні коефіцієнти з кожного обмеження ЗЛП.

3-й етап. Перевіряють опорний план на оптимальність згідно з наведеною далі теоремою.

3.2.3. *Теорема ознаки оптимальності опорного плану*

Опорний план $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ ЗЛП є оптимальним, якщо для всіх j $(j = \overline{1, n})$ виконується умова

$$Z_j - C_j \geq 0 \text{ (для задачі на max)}$$

або

$$Z_j - C_j \leq 0 \text{ (для задачі на min)}.$$

Значення оцінок $Z_j - C_j$ визначаються за формулою

$$\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - C_j \ (j = \overline{1,n})$$

або безпосередньо із симплексної таблиці як скалярний добуток векторів стовпців «$C_{баз}$» й «A_j» мінус відповідний коефіцієнт C_j. Розраховані оцінки записують в окремий рядок симплексної таблиці, який називають ***оціночним*** й позначають $m + 1$.

У процесі перевірки умови оптимальності можливі такі випадки:

а) усі $\Delta_j \ (j = \overline{1,n})$ задовольняють умову оптимальності, і тоді визначений опорний план є оптимальним;

б) не всі Δ_j задовольняють умову оптимальності, і тоді потрібно виконати перехід до наступного, нового опорного плану задачі.

4-й етап. Перехід від одного опорного плану до іншого виконується зміною базису, тобто виключенням з нього деякої змінної й введенням замість неї нової із числа вільних змінних задачі.

Змінна, яка включається в новий базис, відповідає тій оцінці $Z_j - C_j$, що не задовольняє умову оптимальності. Якщо таких оцінок кілька, то серед них вибирають найбільшу за абсолютною величиною й відповідну їй змінну вводять у базис. Припустимо, що індекс зазначеної змінної $j = k$. Відповідний стовпець симплексної таблиці називають ***напрямним***.

Для визначення змінної, яка повинна бути виключена з базису, знаходять для всіх невід'ємних a_{ik} напрямного стовпця величину $\theta = b_i / a_{ik}$ й записують її в останній стовпець симплексної таблиці. Далі вибирають найменше значення, яке вказує на змінну, що виводиться з базису. Припустимо, що це виконується для $i = r$. Відповідний рядок симплексної таблиці буде *називатися* ***напрямним***. Іноді напрямні стовпець і рядок ще називають ***розв'язуючими***. Перетином розв'язуючого стовпця й розв'язуючого рядка визначається число симплексної таблиці a_{rk}, яке називають ***розв'язуючим елементом***. За допомогою елементу a_{rk} і методу Жордано–Гаусса розраховують нову симплексну таблицю.

Далі ітераційний процес повторюють доти, доки не буде визначений оптимальний план задачі.

У випадку застосування симплекс-методу для розв'язування ЗЛП можливі такі випадки:

а) Якщо в оціночному рядку останньої симплексної таблиці оцінка $Z_j - C_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що ЗЛП має альтернативний оптимальний план. Одержати його можна, вибравши розв'язуючий елемент у відзначеному стовпці таблиці й виконавши один крок симплекс-методу.

б) Якщо при переході в симплекс-методі від одного опорного плану задачі до іншого в напрямному стовпці немає невід'ємних елементів a_{rk}, тобто неможливо вибрати змінну, яка повинна бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція ЗЛП є необмеженою в даній області й оптимальних планів не існує.

3.3. Метод штучного базису

Розв'язування ЗЛП симплекс-методом починається зі знаходження першого опорного плану. Вище вказувалося, що такий план може бути знайдений шляхом зведення системи рівнянь-обмежень до одиничного базису. Однак існує й інший метод побудови початкового опорного плану. Цей метод може застосовуватися, наприклад, у випадку, коли в системі обмежень не вистачає необхідної кількості одиничних лінійно незалежних векторів. Для його аналізу разом зі ЗЛП, що будемо називати ***вихідною***, розглянемо розширену задачу, яка складена на основі вихідної задачі в такий спосіб. Припускаючи, що $b_i \ge 0\,(i = \overline{1,m})$, уведемо в кожне рівняння-обмеження по одній невід'ємній змінній $x_{n+i} \ge 0\,(i = \overline{1,m})$, які будемо називати ***штучними***, а із цільової функції віднімемо суму штучних змінних, помножену на як завгодно велике додане число M (при розв'язуванні задачі на max). У результаті одержимо так звану M-задачу:

знайти

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max; \qquad (3.4)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \ (i = \overline{1,m}); \qquad (3.5)$$

$$x_j \ge 0\,(\overline{1,n+m}). \qquad (3.6)$$

У системі (3.5) змінні x_{n+i} $(i=\overline{1,m})$ утворюють ***базис***, що називається ***штучним***. При $x_1 = \ldots = x_n = 0$ з (3.5) одержимо початковий опорний план $X_0 = (0, \ldots 0, b_1 \ldots b_m)$ M-задачі.

Далі задача розв’язується на основі застосування алгоритму симплекс-методу.

Примітка. При розв’язанні ЗЛП методом штучного базису штучні змінні необхідно вводити тільки в ті рівняння-обмеження, які не є розв’язаними відносно «природних» базисних змінних.

Як видно з рівняння (3.4), функція F складається із двох доданків: $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = f$ й $M\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$, – тому в симплексних таблицях замість одного оціночного рядка $m + 1$ розглядаються два рядки: $(m + 1)$-й для f, $(m + 2)$-й для $M\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$. При цьому оцінки $Z_j – C_j$ записуються в обидва рядки відповідним чином й ознака оптимальності перевіряється за обома рядками. За значеннями оцінок $Z_j – C_j$ визначається змінна, яка повинна бути включена в базис. Перетворення в таблиці продовжують доти, доки в базисі не будуть виключені всі штучні змінні, які назад у базис не вводяться. Після виключення з базису всіх штучних змінних процес пошуку оптимального плану триває з використанням тільки першого рядка цільової функції.

Отже, необхідною умовою оптимальності опорного плану є також вимога, щоб у процесі розв’язування задачі всі штучні змінні були виведені з базису й дорівнювали нулю.

Якщо у вихідній задачі необхідно мінімізувати цільову функцію, то в M-задачі цільова функція буде мати вигляд

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \min, \tag{3.7}$$

тобто у цільовій функції задачі на min штучні змінні мають коефіцієнти $(+M)$.

Слід зазначити, що якщо для опорного плану ЗЛП всі оцінки $Z_j – C_j$ $(j=\overline{1,n})$ задовольняють умову оптимальності, але при цьому хоча б одна штучна змінна є базисною й має додатне значення, то це означає, що система обмежень задачі несумісна й оптимальних планів такої задачі не існує.

Якщо M-задача не має розв’язку, то й вихідна задача є нерозв’язаною.

Контрольні запитання

1. Розкрийте геометричний зміст нерівностей, умови невід'ємності змінних та цільової функції.

2. Наведіть алгоритм графічного методу розв'язування ЗЛП. У чому його переваги та недоліки?

3. Що таке симплекс-метод? Наведіть його алгоритм.

4. Яка ознака оптимальності опорного плану?

5. Що таке виродженість розв'язку ЗЛП?

6. Сформулюйте правило уникнення зациклення при застосуванні симплекс-методу.

7. У чому суть методу штучного базису?

ТЕМА 4. ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ ТА АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

4.1. Поняття двоїстості. Правила побудови двоїстих задач

Кожній задачі лінійного програмування відповідає інша задача, що називається *двоїстою*, або *сполученою стосовно вихідної*.

Двоїста ЗЛП – це допоміжна ЗЛП, що випливає із умов прямої задачі за деякими правилами.

Існує зв'язок не тільки між умовами прямої й двоїстої задач, але й між їхніми розв'язками. Це означає, що, розв'язавши одну з пари двоїстих задач, можна одержати непряму інформацію про розв'язок іншої. А, отже, розв'язуючи ЗЛП, можна розв'язати більш легку з пари двоїстих і на основі результату її розв'язання одержати розв'язок більш складної задачі.

4.1.1. *Вигляд двоїстої задачі*

Задача I (вихідна)

$$Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0.$$

Задача II (двоїста)

$$F=b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\ldots+a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ldots+a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots, y_m \ge 0.$$

Розглянемо формально дві задачі I й II лінійного програмування. Обидві задачі мають такі властивості:

1. В одній задачі шукають максимум лінійної функції, в іншій – мінімум.

2. Коефіцієнти при змінних у лінійній функції одної задачі є вільними членами системи обмежень в іншій.

3. Кожна із задач задана у стандартній формі, причому в задачі максимізації всі нерівності вигляду «≤», а в задачі мінімізації – всі нерівності вигляду «≥».

4. Матриці коефіцієнтів при змінних у системах обмежень обох задач є транспонованими одна відносно одної:

Вихідна $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, двоїста $A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

5. Число нерівностей у системі обмежень однієї задачі збігається із числом змінних в іншій задачі.

6. Умови невід’ємності змінних є в обох задачах.

Дві задачі лінійного програмування, що мають зазначені властивості, називаються ***симетричними взаємно двоїстими задачами***. Надалі для зручності будемо називати їх просто ***двоїстими задачами***.

Виходячи з визначення, можна запропонувати такі *правила побудови двоїстих задач*.

1. Звести всі нерівності системи обмежень вихідної задачі до одного змісту: якщо у вихідній задачі шукають максимум лінійної функції, то всі нерівності системи обмежень звести до вигляду «≤», а якщо шукають мінімум – до вигляду «≥». Для нерівностей, у яких дана вимога не виконується, помножити на (–1).

2. Скласти розширену матрицю системи A_1, у яку включити матрицю коефіцієнтів при змінних A, стовпець вільних членів системи обмежень і рядок коефіцієнтів при змінних у лінійній функції.

3. Знайти матрицю A_1', транспоновану до матриці A.

4. Сформулювати двоїсту задачу на підставі отриманої матриці A_1' й умови невід’ємності змінних.

4.2. Співвідношення двоїстості

Співвідношення двоїстості – це співвідношення між значеннями змінних пари двоїстих задач.

Між прямою й двоїстою задачами лінійного програмування існує тісний взаємозв’язок, що випливає з наведених далі теорем.

Перша теорема двоїстості

Якщо одна із взаємно двоїстих задач має оптимальний розв’язок, то його має й інша, причому оптимальні значення їхніх цільових функцій дорівнюють одне одному

$$Z_{\max} = F_{\min} \text{ або } Z(X^*) = F(Y^*).$$

Якщо ж цільова функція однієї із задач необмежена, то інша задача взагалі не має розв'язків.

Якщо пряма задача лінійного програмування має оптимальний план X^*, визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі Y^* визначається так:

$$Y^* = \vec{C}_{\text{баз}} D^{-1}. \tag{4.1}$$

У виразі (4.1) $C_{\text{баз}}$ – вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані. При цьому порядок наступності координат цього вектора визначається порядком запису базисних змінних в останній симплексній таблиці, D^{-1} – матриця, обернена до матриці D, яка складається з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких взяті з початкового опорного плану задачі.

Обернена матриця D^{-1} завжди міститься в останній симплексній таблиці в тих стовпцях, де в першій таблиці знаходилася одинична матриця. За допомогою зазначеного співвідношення під час визначення оптимального плану однієї із взаємно двоїстих задач лінійного програмування знаходять розв'язок іншої задачі.

Друга теорема двоїстості

Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі i-те обмеження виконується як строга нерівність то відповідний i-й компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Якщо i-й компонент оптимального плану двоїстої задачі додатний, то відповідне i-те обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Третя теорема двоїстості

Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, обумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження. Економічний зміст третьої теореми двоїстості полягає в тому, що відповідна позитивна оцінка показує зростання значення цільової функції прямої задачі, якщо запас відповідного дефіцитного ресурсу збільшується на одну одиницю.

4.3. Економічна інтерпретація двоїстої задачі

Теореми двоїстості дозволяють дати економічну інтерпретацію двоїстості. Розглянемо це питання детальніше. Для цього розглянемо пряму задачу як задачу розподілу ресурсів, тобто як задачу планування виробництва.

Для цього випадку кожен коефіцієнт цільової функції прямої задачі $C_j\ (j=\overline{1,n})$ являє собою величину прибутку, що з'являється від реалізації одиниці j-го виду продукції; $b_i\,(i=\overline{1,m})$ – запаси сировини i-го виду; $a_{ij}\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ – кількість одиниць сировини i-го виду, що використовуються для виготовлення одиниці j-го виду продукції; $x_j\ (j=\overline{1,n})$ – кількість одиниць j-го виду продукції, яку необхідно виготовити.

Тоді для економічної інтерпретації змінних y_i $(i=\overline{1,m})$ двоїстої задачі досить проаналізувати розмірності величин Z і F.

Оскільки розмірністю величини є гроші (ця величина характеризує прибуток), то з того, що $Z_{\max}$ = $F_{\min}$, випливає, що розмірністю величини y_i $(i=\overline{1,m})$ є $\dfrac{\text{гроші}}{\text{обсяг ресурсів}}$, тобто цінність i-го ресурсу. Тому іноді двоїсті змінні називають ще тіньовими цінами.

А, отже, з економічної точки зору цільова функція F визначає загальну вартість усіх ресурсів.

За допомогою двоїстих оцінок можна визначити статус кожного ресурсу прямої задачі й рентабельність виготовленої продукції.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, можна умовно розділити на дефіцитні й недефіцитні залежно від того, повне або часткове їхнє використання передбачене оптимальним планом прямої задачі. Отже, якщо $y_i > 0$, то i-й ресурс використовується повністю і є дефіцитним. Якщо ж $y_i = 0$, то i-й ресурс використовується не повністю і є недефіцитним.

Аналіз рентабельності виготовленої продукції виконується за допомогою двоїстих оцінок й обмежень двоїстої задачі.

Ліва частина j-го обмеження являє собою вартість усіх ресурсів, які використовуються для виробництва одиниці i-ї продукції. Якщо вона більше C_j, то виробництво нерентабельне й тому в прямій ЗЛП $x_j = 0$. Якщо ж вона дорівнює C_j, то виробництво рентабельне й в оптимальному плані $x_j > 0$.

Контрольні запитання

1. Що називається двоїстою задачею? Які є властивості взаємно двоїстих задач лінійного програмування?
2. Наведіть правила побудови двоїстих задач.
3. Сформулюйте теореми двоїстості.
4. Розкрийте економічну інтерпретацію двоїстої задачі. У чому суть понять: «тіньові ціни», «дефіцитні та недефіцитні ресурси»?

ТЕМА 5. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Транспортна задача (ТЗ) − це специфічна ЗЛП, що застосовується для визначення найбільш економічного плану перевезення однорідної продукції від постачальників до споживачів.

5.1. Постановка транспортної задачі та її математична модель

Припустимо, що деяку однорідну продукцію, зосереджену в m пунктах A_i у кількості a_i $(i=\overline{1,m})$ одиниць, необхідно доставити n споживачам B_j у кількості b_j $(j=\overline{1,n})$ одиниць. Відома вартість c_{ij} перевезення одиниці продукції від i-го пункту до j-го споживача.

Необхідно скласти такий план перевезень, який би дав можливість вивезти всю продукцію, повністю задовольнив потреби споживачів і мав мінімальну вартість.

Кількість одиниць продукції, запланованих для перевезення з i-го пункту до j-го споживача, позначимо через x_{ij}. Тоді умову задачі можна записати у вигляді табл. 5.1, яку будемо називати *матрицею планування*.

Таблиця 5.1

Пункти	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	…	b_n	

Складемо математичну модель задачі.

Оскільки з i-го пункту до j-го споживача для перевезення заплановано x_{ij} одиниць продукції, то вартість перевезення становить $c_{ij}x_{ij}$. Тоді вартість усього плану перевезень можна подати у вигляді цільової функції.

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + \ldots + c_{mn}x_{mn}. \tag{5.1}$$

Систему обмежень одержуємо з таких умов задачі:

а) вся продукція має бути вивезена, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = \overline{1,m}); \tag{5.2}$$

б) всі потреби мають бути задоволені, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j \ (j = \overline{1,n}). \tag{5.3}$$

Таким чином, математична модель транспортної задачі має такий вигляд: знайти найменше значення лінійної функції (5.1) при обмеженнях (5.2) − (5.3) і при

$$x_{ij} > 0 \, (i = \overline{1,m}; \, j = \overline{1,n}). \tag{5.4}$$

Якщо в ТЗ загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{5.5}$$

то така ТЗ називають *збалансованою*, або *закритою*. Якщо ж така умова не виконується, то ТЗ називають *незбалансованою*, або *відкритою.*

Планом ТЗ називають будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (5.2) − (5.4) ТЗ, що позначають матрицею

$$x = (x_{ij}) \, (i = \overline{1,m}; \, j = \overline{1,n}).$$

Оптимальним планом ТЗ називають матрицю, яка задовольняє системі обмежень (5.2)−(5.4) і для якої цільова функція (5.1) досягає найменше значення. Опорний план ТЗ називається *невиродженим*, якщо в матриці планування (у таблиці ТЗ) позитивних x_{ij} є $m + n - 1$, а інші дорівнюють нулю.

Якщо ж у матриці планування заповнених клітинок менше, ніж $m + n - 1$, то опорний план називають *виродженим.*

5.2. Теорема умови існування розв'язку транспортної задачі

Для того щоб існував розв'язок ТЗ, необхідно й достатньо, щоб вона була збалансованою, тобто щоб $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

5.3. Метод потенціалів

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, яку можна розв'язати симплекс-методом. Але специфічна структура транспортної задачі дає можливість використати для її розв'язання більш ефективний метод, що повторює по суті кроки алгоритму симплекс-методу. Таким методом є метод потенціалів.

Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів:

1) Визначення типу транспортної задачі (відкрита або закрита).

2) Побудова першого опорного плану транспортної задачі.

3) Визначення потенціалів опорного плану ТЗ.

4) Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність. Констатація оптимального плану, якщо умова оптимальності виконується. Перехід до наступного опорного плану, якщо умова оптимальності не виконується.

5) Повторення дій, починаючи з п. 3.

Розглянемо докладно кожен етап представленого алгоритму.

1-й етап. Якщо під час перевірки умови збалансованості (5.5) виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це виконується введенням фіктивного умовного постачальника A_{m+1} у випадку перевищення загального попиту над запасами ($\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$) із запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів ($\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$), то до закритого типу задача приводиться введенням фіктивного умовного споживача B_{n+1} $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції для фіктивного постачальника A_{m+1} або фіктивного споживача B_{n+1} вважається рівною нулю.

2-й етап. Для побудови початкового опорного плану транспортної задачі існує кілька методів: *північно-західного кута, мінімальної вартості, подвійної переваги* й інших. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, у якій постачальники продукції позначені рядками, а споживачі – стовпцями.

5.4. Методи побудови початкового опорного плану

5.4.1. *Метод північно-західного кута*

Табл. 5.1 заповнюється, починаючи з лівого верхнього кута (північно-західного кута), рухаючись далі по рядку вправо, або по стовпцю вниз. У клітину (1.1) заноситься менше із чисел a_1 й b_1, тобто $x_{11} = \min(a_1, b_1)$.

Якщо $a_1 \geq b_1$, то $x_{11} = b_1$ і перший стовпець закритий для заповнення інших його клітин, тобто $x_{ij} = 0$ для $i = 2, 3, ..., m$ (потреби першого споживача задоволені повністю). Далі рухаються по першому рядку в клітину (1.2). У ній записується менше з чисел $a_1 - b_1$ й b_2, тобто $x_{12} = \min(a_1 - b_1, b_2)$.

Якщо $a_1 < b_1$, то аналогічно закривається перший рядок, тобто $x_{11} = a_1$ і $x_{1k} = 0$ для $k = 2, 3, ..., n$. Далі заповнюється клітина (2.1), у яку заноситься $x_{21} = \min(a_2, b_1 - a_1)$.

Заповнивши клітину (1.2) або (2.1), переходять до заповнення третьої клітини по другому рядку або по другому стовпцю. Цей процес продовжують до повного вичерпання продукції в пунктах або повного задоволення потреб споживачів. Остання заповнена клітина (min) виявиться в останньому m-му рядку й n-му стовпці.

План, отриманий методом північно-західного кута, буде опорним планом системи обмежень транспортної задачі.

5.4.2. *Метод мінімальної вартості*

Ідея цього методу полягає в тому, щоб на кожному кроці заповнювати ту клітину таблиці, що має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, поки не буде розподілена вся продукція між постачальниками й споживачами.

Метод реалізується в такий спосіб: на кожному кроці здійснюється максимально можлива поставка в клітину з мінімальною вартістю c_{ij} перевезень. Заповнення таблиці починається із клітини, якій відповідає найменший елемент вартості c_{ij} із усієї матриці планування. Після цього залишок по рядку або стовпцю заноситься в клітину цього самого рядка або стовпця, якому відповідає наступне за величиною значення вартості c_{ij}, і т.д. Інакше кажучи, послідовність заповнення клітин визначається величиною вартості c_{ij}, а значення x_{ij}, які заносяться в клітини, визначаються так само, як й у методі північно-західного кута.

5.4.3. *Метод подвійної переваги*

Ідея методу подвійної переваги полягає в тому, що перед початком заповнення таблиці необхідно позначити клітини, які мають найменшу вартість у рядках і стовпцях. Таблицю починають заповнювати від клітин, позначених двічі (як мінімальні й у рядку, і у стовпці). Далі заповнюють клітини, позначені один раз (як мінімальні або в рядку, або у стовпці), а вже потім − за методом мінімальної вартості.

Примітка: опорний план, визначений методом мінімальної вартості, не завжди збігається з опорним планом, визначеним методом подвійної переваги.

Слід також зазначити, що ознакою опорності плану ТЗ є його ациклічність, тобто неможливість побудови циклу. Циклом у транспортній задачі називають замкнуту ламану лінію, вершини якого розміщаються в заповнених клітинах таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпців таблиці.

Якщо опорний план є виродженим, то для наступного розв'язування задачі необхідно заповнити відповідну кількість порожніх клітин, записуючи в них «нульове перевезення», але так, щоб при цьому не порушилася ациклічність плану.

3-й етап. Після того, як знайдений початковий опорний план ТЗ, кожному пункту A_i (кожному рядку) ставиться у відповідність деяке число $u_j\ (j=\overline{1,m})$, а кожному споживачеві B_j (кожному стовпцю) – деяке число $v_j\ (j=\overline{1,n})$. Числа u_i, v_j називаються *потенціалами*, відповідно, пункту A_i і споживача B_j. Далі визначаються потенціали опорного плану. Для цього розв'язується система рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, що формується для всіх заповнених клітин транспортної таблиці.

Оскільки для невиродженого початкового опорного плану число зайнятих клітин дорівнює $m + n - 1$, то для визначення чисел u_i, v_j необхідно розв'язати систему з $m + n - 1$ рівнянь із $m + n$ невідомими. Така система лінійних рівнянь є невизначеною. Для усунення невизначеності одній з невідомих надається довільне значення, наприклад нуль. Тоді розв'язок системи визначається однозначно.

4-й етап. Після визначення потенціалів опорний план перевіряється на оптимальність за допомогою потенціалів. При цьому керуються такою теоремою.

5.5. Теорема умови оптимальності опорного плану транспортної задачі

Якщо для деякого опорного плану $X^* = (x_{ij}^*)$ існують потенціали u_i, v_j, для яких виконуються умови:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ для всіх значень } i, j, \text{ для яких } x_{ij} > 0; \tag{5.6}$$

$$u_i + v_j \le c_{ij}, \text{ для всіх значень } i, j, \text{ для яких } x_{ij} = 0, \tag{5.7}$$

то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Якщо хоча б для однієї клітини ця умова не виконується, тобто $u_i + v_j > c_{ij}$, то поточний план є неоптимальним і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконується заповненням клітини, для якої порушена умова оптимальності. Якщо таких клітин декілька, то для заповнення вибирають ту клітину, що має найбільше порушення, тобто таку, для якої

$$\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij} \text{ є найбільшим.}$$

Для обраної порожньої клітини будують цикл перерахунку й виконують перерозподіл продукції в межах цього циклу за такими правилами:

1) кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітині – знак «+», а всім іншим по черзі – знаки «–» й «+»;

2) у порожню клітину переносять менше з чисел x_{ij}, які знаходяться у клітинах зі знаком «–». Одночасно це число додають до відповідних чисел, які розміщаються в клітинах зі знаком «+». Отже, клітина, що була вільною, стає заповненою, а відповідна клітина з мінімальним числом x_{ij} стане порожньою.

У результаті такого перерозподілу продукції виходить новий опорний план транспортної задачі.

5-й етап. Далі повторюються кроки алгоритму, починаючи із кроку 3.

Контрольні запитання

1. У чому суть транспортної задачі?
2. Наведіть формулювання та математичну модель транспортної задачі.
3. Що називається оптимальним планом транспортної задачі?
4. За якої умови існує розв’язок транспортної задачі?
5. Наведіть алгоритм методу потенціалів?
6. Які методи використовуються для побудови початкового опорного плану транспортної задачі? Розкрийте їх зміст.
7. Сформулюйте теорему про оптимальність опорного плану транспортної задачі.

ТЕМА 6. ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

6.1. Постановка задачі цілочислового програмування

За змістом значної частини економічних задач, що належать до задач лінійного програмування, компоненти розв'язку повинні виражатися в цілих числах, тобто бути цілочисловими. До них належать, наприклад: задачі оптимального використання устаткування, календарного планування, про призначення, оптимального розкрою матеріалів, задача комівояжера та ін.

Задача лінійного цілочислового програмування записується так: *знайти такий розв'язок (план)* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *при якому лінійна функція*

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{6.1}$$

набуває максимального або мінімального значення при обмеженнях:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1, m}; \tag{6.2}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n; \tag{6.3}$$

$$x_j \text{ – цілі числа.} \tag{6.4}$$

Слід зазначити, що класична транспортна задача й деякі інші задачі транспортного типу «автоматично» забезпечують розв'язання задачі в цілих числах (якщо, звичайно, цілочислові параметри умов). Однак у загальному випадку умова цілочисловості (6.4), що додається до звичайних задач лінійного програмування, істотно ускладнює її розв'язування.

Для розв'язування задач лінійного цілочислового програмування використовується ряд методів. Найпростіший з них – звичайний метод лінійного програмування. У випадку, якщо компоненти оптимального розв'язання виявляються нецілочисловими, їх округляють до найближчих цілих чисел. Цей метод застосовують тоді, коли окрема одиниця сукупності становить малу частину об'єму всієї сукупності. У протилежному випадку округлення може призвести до віддаленого від оптимального цілочислового розв'язку, тому використовують спеціально розроблені методи.

Методи цілочислової оптимізації можна розділити на *три основні групи*: а) методи відтинання; б) комбінаторні методи; в) наближені методи. Зупинимося докладніше на *методах відтинання*.

6.2. Методи відтинання. Метод Гоморі

Сутність методів відтинання полягає в тому, що спочатку задача розв'язується без умови цілочисловості. Якщо отриманий план цілочисловий, то задача є розв'язаною. У протилежному випадку до обмежень задачі додається нове обмеження, що має такі властивості:

- воно повинне бути лінійним;
- повинне відтинати знайдений оптимальний нецілочисловий план;
- не повинне відтинати жодного цілочислового плану.

Додаткове обмеження, що має зазначені властивості, називається *правильним відтинанням.*

Далі задача розв'язується з урахуванням нового обмеження. Після цього, за необхідністю, додається ще одне обмеження й т.д.

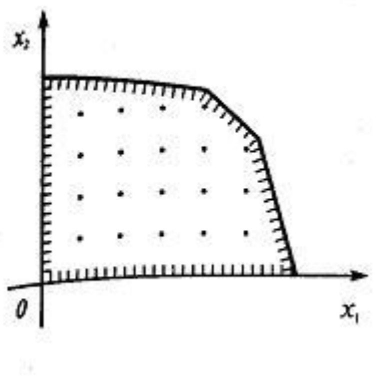

Рисунок 6.1

Геометрично додавання кожного лінійного обмеження відповідає проведенню прямої (гіперплощини), що відтинає від багатокутника (багатогранника) розв'язків деяку його частину разом з оптимальною точкою з нецілими координатами, але не зачіпає жодної із цілих точок цього багатогранника. У результаті новий багатогранник розв'язків містить усі цілі точки, які містяться в первісному багатограннику розв'язків і відповідно отриманий при цьому багатограннику оптимальний розв'язок буде цілочисловим (рис. 6.1).

Один з алгоритмів розв'язання задачі лінійного цілочислового програмування (6.1)–(6.4), запропонований Гоморі, базований на симплекс-методі й використовує досить простий спосіб побудови правильного відтинання.

Нехай задача лінійного програмування (6.1)–(6.3) має кінцевий оптимум і на останньому кроці її розв'язання симплекс-методом отримані наступні рівняння, що виражають основні змінні x_1, x_2, …, x_j, ..., x_m через неосновні змінні x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_{m+i}, ..., x_n оптимального розв'язку

$$
\begin{cases}
x_1 = \beta_1 - \alpha_{1\,m+1} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{1n} x_n, \\
x_2 = \beta_2 - \alpha_{2\,m+1} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{2n} x_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_i = \beta_i - \alpha_{i\,m+1} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{in} x_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_m = \beta_m - \alpha_{m\,m+1} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{mn} x_n,
\end{cases}
\tag{6.5}
$$

то оптимальним розв'язком задачі (6.1)–(6.3) є $X^* = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_m, 0, 0, \ldots, 0)$, у якому, наприклад, β_i – нецілий компонент.

У цьому випадку можна довести, що нерівність

$$\{\beta_i\} - \{\alpha_{i\,m+1}\} x_{m+1} - \ldots - \{\alpha_{in}\} x_n \le 0, \tag{6.6}$$

сформована за *i*-м рівнянням системи (6.5), має всі властивості правильного відтинання.

(У нерівності (6.6) символ $\{\}$ означає дробову частину числа. Цілою частиною числа *a* називається найбільше ціле число $[a]$, що не перевищує *a*, а дробовою частиною числа – число $\{a\}$, як різниця між цим числом і його цілою частиною, тобто $\{a\} = a - [a]$. Наприклад, для $a = 2\frac{1}{3} \to [a] = 2, \{a\} = 2\frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{3}$.)

Для розв'язання задачі цілочислового лінійного програмування (6.1) – (6.4) використовується такий ***алгоритм методу Гоморі***:

1. Симплекс-методом розв'язати задачу (6.1)–(6.3) без урахування умови цілочисловості. Якщо всі компоненти оптимального плану цілі, то він є оптимальним і для задачі цілочислового програмування (6.1)–(6.4). Якщо перша задача (6.1)–(6.3) є нерозв'язаною (тобто не має кінцевого оптимуму або умови її суперечливі), то й друга задача (6.1)–(6.4) також нерозв'язна.

2. Якщо серед компонентів оптимального розв'язку є нецілі, то вибрати компоненту з найбільшою цілою частиною й за відповідним рівнянням системи (6.5) сформувати правильне відтинання (6.6).

3. Нерівність (6.6) уведенням додаткової невід'ємної цілочислової змінної перетворити в рівносильне рівняння

$$\{\beta_i\} - \{\alpha_{i\,m+1}\}x_{m+1} - \ldots - \{\alpha_{in}\}x_n + x_{n+1} = 0 \tag{6.7}$$

і включити його в систему обмежень (6.2).

4. Отриману розширену задачу розв'язати симплекс-методом. Якщо знайдений оптимальний план буде цілочисловим, то задача цілочислового програмування (6.1) – (6.4) розв'язана. У протилежному випадку повернутися до п. 2 алгоритму.

Якщо задачу розв'язано в цілих числах, то після кінцевого числа кроків (ітерацій) оптимальний цілочисловий план буде знайдений.

Якщо у процесі розв'язання з'явиться рівняння (що виражає основну змінну через неосновні) з нецілим вільним членом і цілими іншими коефіцієнтами, то відповідне рівняння не має розв'язку в цілих числах. У цьому випадку й дана задача не має цілочислового оптимального розв'язку.

6.3. Метод гілок і меж

Метод гілок і меж – один з *комбінаторних* методів. Його суть полягає в упорядкованому переборі варіантів і розгляді лише тих з них, які виявляються за певними ознаками перспективними, і відкиданні безперспективних варіантів. Метод гілок і меж полягає в наступному: множина допустимих розв'язків (планів) деяким способом розбивається на підмножини, кожна з яких цим же способом знову розбивається на підмножини. Процес триває доти, поки не отриманий оптимальний цілочисловий розв'язок вихідної задачі.

Нехай задачу 1 (задачу (6.1)–(6.3) максимізації лінійної функції Z без урахування цілочисловості змінних) розв'язано симплекс-методом і відомі нижня й верхня межі для кожної цілочислової змінної x_j: $v_j \le x_j \le w_j$ (j = 1, 2,…, n), а також нижня границя лінійної функції Z_0, тобто при будь-якому плані X $Z(X) \ge Z_0$. Припустимо для визначеності, що тільки перший компонент x_1^* оптимального плану X^* задачі 1 не задовольняє умові цілочисловості. Тоді з області допустимих розв'язків задачі 1 виключається область: $[x_1^*] < x_1^* < [x_1^*]+1$, де $[x_1^*]$ – ціла частина числа x_1^*. У результаті із задачі 1 формують дві задачі: 2 і 3, які відрізняються одна від одної тим, що в задачі 2, крім обмежень (6.2) задачі 1, додано обмеження $v_1 \le x_1^* \le [x_1^*]+1$, а в задачі 3, крім тих же обмежень (6.2), додано обмеження $[x_1^*]+1 \le x_1^* \le w_1$.

Одержимо список із двох задач: 2 і 3. Розв'язуємо одну з них (у будь-якому порядку). Залежно від отриманого розв'язку список задач розширюється або зменшується.

Якщо в результаті розв'язування однієї із задач 2 або 3 отриманий нецілочисловий оптимальний план, для якого $Z(X^*) \le Z_0$, то ця задача виключається зі списку. Якщо $Z(X^*) > Z_0$, то з цієї задачі формуються дві нові задачі. Якщо отриманий розв'язок X^* задовольняє умові цілочисловості і $Z(X^*) > Z_0$, то значення Z_0 виправляється і за величину Z_0 приймається оптимум лінійної функції отриманого оптимального цілочислового плану. Процес триває доти, поки список задач не буде вичерпаний, тобто всі задачі не будуть розв'язані.

Примітка 1. Кожна наступна задача, що складається у процесі застосування методу гілок і меж, відрізняється від попередньої лише однією нерівністю-обмеженням. Тому при розв'язуванні кожної наступної задачі не треба розв'язувати її симплекс-методом із самого початку (з І кроку). А доцільніше почати розв'язок з *останнього кроку* (ітерації) попередньої задачі, із системи обмежень якої виключити «старі» (одне або два) рівняння-обмеження і ввести в цю систему «нові» рівняння-обмеження.

Примітка 2. Назва методу гілок і меж пояснюється тим, що у процесі розв'язування задача послідовно «гілкується», розпадаючись на більш прості. Так, процес розв'язування задачі можна подати у вигляді дерева (схеми), цифри у вузлах (вершинах) якого позначають номери задач (рис. 6.2).

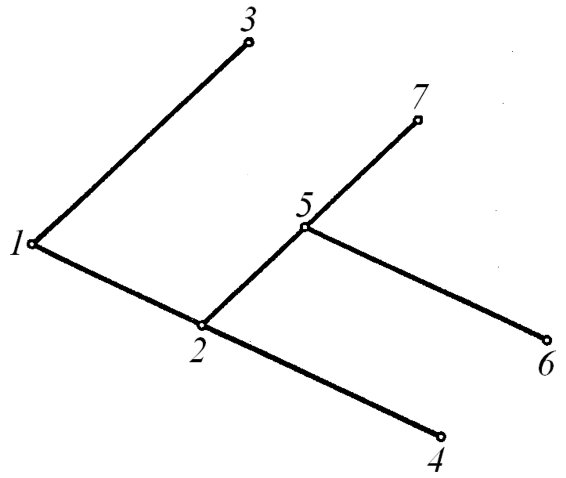

Рисунок 6.2

Контрольні запитання

1. Наведіть формулювання та математичну модель задачі цілочислового програмування.
2. Класифікуйте методи цілочислової оптимізації.
3. У чому полягає сутність методів відтинання?
4. Які властивості має правильне відтинання?
5. Поясніть геометричний зміст додавання кожного лінійного обмеження.
6. Наведіть алгоритм методу Гоморі.
7. Наведіть алгоритм методу «гілок і меж».
8. Як можна пояснити назву методу «гілок і меж»?

ТЕМА 7. ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

7.1. Постановка задачі дробово-лінійного програмування (ЗДЛП)

При розв'язуванні ряду технічних, воєнно-економічних задач, при дослідженні економічних систем і процесів за критерій оптимальності часто вибирають показники рентабельності, продуктивності, ефективності тощо, які математично подаються у вигляді дробово-лінійних функцій. За умови наявності лінійних обмежень, що характеризують (описують) досліджувану систему чи процес, їх економіко-математична модель являє собою так звану задачу дробово-лінійного програмування (ЗДЛП).

Постановка останньої має вигляд, поданий нижче.

Необхідно визначити такі значення $x_j \ (j = \overline{1,n})$, при яких оптимізується значення цільової функції

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0} \to \max(\min) \qquad (7.1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, \ge, =\} b_i \ (i = \overline{1,m}); \qquad (7.2)$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}),$$

де $c_0, d_0, c_j, d_j, a_{ij}, b_i \in R \ (i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n})$.

При цьому вважається, що знаменник цільової функції (7.1) в області допустимих розв'язків системи обмежень (7.2) не дорівнює нулю.

7.2. Симплекс-метод розв'язування ЗДЛП

Для розв'язування ЗДЛП можуть використовуватись симплексний або графічний методи. У випадку застосування симплекс-методу задача (7.1) − (7.2) зводиться до канонічної форми. Тобто обмеження системи обмежень (7.2) подаються у вигляді рівнянь. Після чого отримана задача зводиться до ЗЛП. Останнє виконується за допомогою таких перетворень.

Вводиться позначення

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0 = \frac{1}{y_0}, \tag{7.3}$$

у якому y_0 вважається const.

Далі здійснюється заміна

$$y_j = y_0 x_j \ \ (j = \overline{1,n}). \tag{7.4}$$

Тоді з урахуванням (7.3) і (7.4) задача (7.1)−(7.2) набуває такого вигляду.

Знайти

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + c_0 y_0 \to \max(\min) \tag{7.5}$$

за умов

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \ (i = \overline{1,m}); \\ &\sum_{j=1}^{n} d_j y_j + d_0 y_0 = 1; \\ &y_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}),\ y_0 > 0. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Отримана задача (7.5)−(7.6) є ЗЛП. Для розв’язання останньої використовується симплекс-метод. Його застосування дозволяє отримати оптимальний план у вигляді

$$Y* = \{y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*, y_0^*\}. \tag{7.7}$$

Подальше визначення оптимального плану $X* = \{x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\}$ початкової задачі (7.1)−(7.2) здійснюється за формулою

$$x_j^* = \frac{y_j^*}{y_0^*} \ (j = \overline{1,n}). \tag{7.8}$$

Описані перетворення визначають алгоритм симплекс-методу розв’язування ЗДЛП.

7.3. Графічний метод розв'язування ЗДЛП

Для розв'язування ЗДЛП у ряді випадків може використовуватись графічний метод. Межі його застосування поширюються на ЗДЛП, які містять дві змінні. Здійснимо обґрунтування графічного методу.

Розглянемо наступну ЗДЛП, розв'язання якої можливе графічним методом:

визначити такі значення x_j $(j=\overline{1,2})$, при яких оптимізується значення цільової функції

$$Z=\frac{c_1x_1+c_2x_2}{d_1x_1+d_2x_2}\to\max(\min) \tag{7.9}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{2}a_{ij}x_j\{\le,\ge,=\}b_i\ (i=\overline{1,m}); \tag{7.10}$$

$$x_j\ge 0\ (j=\overline{1,2}),$$

де $c_0,d_0,c_j,d_j,a_{ij},b_i\in R\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,2})$.

Обмеження (7.10) з геометричної точки зору визначають опуклу відкриту або замкнуту, обмежену або необмежену множину (багатокутник), яка знаходиться у першому координатному куті. Цільова функція (7.9) у геометричному зображенні має вигляд прямої

$$x_2=\frac{Zd_1-c_1}{c_2-Zd_2}x_1, \tag{7.11}$$

що проходить через початок координат.

Як випливає з (7.11), кут нахилу цієї прямої визначається коефіцієнтом

$$R_Z=\frac{Zd_1-c_1}{c_2-Zd_2}. \tag{7.12}$$

Величина останнього при заданій умові задачі (7.9) − (7.10) визначається числом Z, яке, у свою чергу, залежить від координат точок ОДР задачі.

З (7.12) нескладно отримати

$$R'_Z=\frac{c_2d_1-c_1d_2}{(c_2-Zd_2)^2}. \tag{7.13}$$

Таким чином, знак похідної R'_Z визначається знаком величини $c_2 d_1 - c_1 d_2$. Знак останньої і визначає напрям обертання прямої (7.11) навколо початку координат. З урахуванням того, що $-(c_2 d_1 - c_1 d_2) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$, можна зробити *такі висновки*: 1) якщо $\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} > 0$, то $R'_Z < 0$, і пряма (7.11) обертається навколо початку координат за ходом руху годинникової стрілки; 2) якщо $\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} < 0$, то $R'_Z > 0$, і пряма (7.11) обертається навколо початку координат проти руху годинникової стрілки. Знання напряму обертання прямої (7.11) дозволяє встановити точки, в яких досягається максимальне чи мінімальне значення цільової функції (7.9). Так, зокрема, при обертанні прямої (7.11) навколо початку координат і входженні в ОДР задачі (7.9)−(7.10) їх перша спільна точка є точкою мінімуму, а остання − при виході прямої (7.11) з ОДР є точкою максимуму. Це твердження, очевидно, має місце незалежно від напряму обертання прямої (7.11).

Як правило, точка максимуму або мінімуму є вершиною багатокутника розв'язків. Для визначення координат цієї вершини необхідно розв'язати систему рівнянь, які є рівняннями відповідних сторін багатокутника.

В окремих випадках *точок максимуму або мінімуму може бути безліч*. Зокрема це має місце, коли пряма (7.11) при обертанні та входженні чи виході з ОДР дотикається до сторони багатокутника розв'язків.

Наведене обґрунтування дозволяє сформулювати ***алгоритм графічного методу розв'язування ЗДЛП*** у такому вигляді:

1. У системі координат Ox_1x_2 будується ОДР, що визначається обмеженнями (7.10).

2. Будується пряма (7.11) при Z = const.

3. Встановлюється знак виразу $(c_2 d_1 - c_1 d_2)$ і на його основі визначається напрям обертання прямої (7.11).

4. Встановлюються точки, в яких досягається максимальне або мінімальне (залежно від умови задачі) значення цільової функції (7.9).

5. Визначаються координати точок оптимуму.

6. З виразу (7.9) з урахуванням координат точок оптимуму визначається оптимальне значення цільової функції (7.9).

Контрольні запитання

1. Наведіть формулювання та математичну модель задачі дробово-лінійного програмування.

2. У чому полягає симплекс-метод розв’язування задач дробово-лінійного програмування?

3. Обґрунтуйте використання графічного методу для розв’язування задач дробово-лінійного програмування. Наведіть його алгоритм.

4. У яких випадках точок максимуму або мінімуму може бути безліч?

ТЕМА 8. ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

8.1. Постановка задачі нелінійного програмування

Загальна задача математичного програмування формулюється наступним чином:
знайти вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, який задовольняє системі обмежень

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, \ge, =\}b_i \ (i = \overline{1,m}) \tag{8.1}$$

і при якому функція

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{8.2}$$

набуває екстремального значення.

При цьому передбачається, що функції $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ є відомими.

Звичайно, на деякі змінні x_1, x_2,…, x_n накладається умова невід’ємності. Крім того, обмеженням може бути й умова цілочисловості розв’язку для ряду змінних.

Якщо

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ (i = \overline{1,m})$$

і

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

де a_{ij}, c_j – відомі константи, то за умови невід’ємності розв’язку задача (8.1) – (8.2) перетворюється в задачу лінійного програмування.

Будь-яка інша задача математичного програмування, яка не задовольняє останні умови, називається нелінійною.

Клас задач нелінійного програмування (ЗНП) значно ширше класу задач лінійного програмування. Основні результати в нелінійному програмуванні отримані для випадків, коли система обмежень лінійна, а цільова функція нелінійна. Навіть у таких задачах розв’язок може бути знайдено тільки для вузького класу цільових функцій, а саме для сепарабельних і квадратичних функцій (функція сепарабельна, якщо вона є сумою n функцій $f_j(x_j)$).

Якщо в задачах лінійного програмування точки екстремуму є вершинами багатогранників розв’язків, то в задачах з нелінійною цільовою функцією вони можуть лежати всередині області, на ребрі (грані) або у вершині багатогранника. Ще більші труднощі виникають при розв'язуванні задач із нелінійними обмеженнями.

Методи нелінійного програмування бувають прямі й непрямі. Прямими методами оптимальні розв'язки шукають у напрямку найшвидшого збільшення (зменшення) цільової функції. Типовими для цієї групи методів є градієнтні. Непрямі методи полягають у зведенні задачі до такої, знаходження оптимуму якої вдається спростити. До них належать найбільш розроблені методи квадратичного й сепарабельного програмування.

Оптимізаційні задачі, на змінні яких накладаються обмеження, розв'язують методами класичної математики. Оптимізацію з обмеженнями-рівняннями виконують методами зведеного градієнта, а саме методом Якобі й множників Лагранжа. У задачах оптимізації з обмеженнями-нерівностями досліджують необхідні й достатні умови існування екстремуму Куна – Таккера.

8.2. Графічний метод розв'язування задач нелінійного програмування

Розгляд задач нелінійного програмування починають із класичної задачі оптимізації. Задачі такого роду мають місце, якщо в обмеженнях є тільки рівняння, відсутні умови невід'ємності та цілочисловості змінних, а функції $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ безперервні й мають часткові похідні не нижче другого порядку. Класичні методи оптимізації при цьому є теоретичним апаратом, що дозволяє в ряді випадків обґрунтувати розробку відповідного обчислювального методу.

Одним з найпростіших типів ЗНП є ЗНП із двома змінними. Ці задачі мають такий вигляд.

Знайти

$$Z = f(x_1, x_2) \to \max(\min) \tag{8.3}$$

при

$$g_i(x_1, x_2)\{\le, \ge, =\}\, b_i \ (i = \overline{1, m}); \tag{8.4}$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \tag{8.5}$$

Для їх розв'язання можна застосувати ***графічний метод***. Суть його в наступному.

1. Будуємо ОДР, що визначається обмеженнями (8.4) – (8.5).

2. Будуємо лінії рівня, які визначаються цільовою функцією (8.3).

3. Установлюються точки, що підозрілі на екстремум. Такими точками є точки, що належать і графіку цільової функції, і ОДР, і які в достатньо малому своєму околі інших точок ОДР не містять.

4. Знаходяться значення цільової функції (8.3) у визначених точках і серед них вибираються ті, в яких досягається найбільше й найменше значення. В окремих випадках на основі застосування достатніх умов екстремуму визначаються точки екстремуму.

8.3. Метод множників Лагранжа

У математичному аналізі задачі типу: знайти значення змінних x_1, $x_2,\ldots, x_n$, які задовольняють системі обмежень

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \ (i = \overline{1, k}), \\ \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \ (i = \overline{k+1, m}) \end{cases} \quad (8.6)$$

і забезпечують екстремум функції

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n), \quad (8.7)$$

називають задачами на умовний екстремум.

Якщо серед обмежень немає нерівностей й умов невід'ємності або дискретності змінних, $m < n$, функції f й g_i неперервні разом із частинними похідними принаймні до другого порядку включно, то наведена задача на умовний екстремум зводиться до задачі:

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min); \quad (8.8)$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \ (i = \overline{1, m}). \quad (8.9)$$

Ці задачі нелінійного програмування називають *класичними задачами оптимізації*. Їх у деяких випадках можна розв'язувати методами диференціального числення.

У найпростішому випадку *умовним екстремумом функції* $f(x_1, x_2)$ називається максимум або мінімум цієї функції, досягнутий за умови, що x_1 й x_2 задовольняють додаткову умову (рівнянню зв'язку)

$$\varphi(x_1, x_2) = b.$$

Умовний екстремум функції $f(x_1, x_2)$ при існуванні додаткового обмеження $\varphi(x_1, x_2) = b$ знаходять за допомогою ***функції Лагранжа***

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda[b - \varphi(x_1, x_2)],$$

де λ – невід'ємний сталий множник (множник Лагранжа), безумовний екстремум якого збігається з умовним екстремумом даної функції $f(x_1, x_2)$. Пояснюється це тим, що для точок (x_1, x_2), які задовольняють умову $\varphi(x_1, x_2) = b$, другий доданок згортається в нуль, і тоді $L = f$. Для інших точок $L \neq f$. Звідси і випливає, що задача про знаходження умовного екстремуму функції $f(x_1, x_2)$ може бути замінена знаходженням звичайного екстремуму функції L, оскільки в області допустимих розв'язків функцію $f(x_1, x_2)$ можна замінити функцією Лагранжа.

Необхідна умова екстремуму зводиться до існування розв'язку системи трьох рівнянь із трьома невідомими

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = b - \varphi(x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

Є й достатні умови, при виконанні яких розв'язок (x_1, x_2, λ) системи визначає точку (стаціонарну), у якій $f(x_1, x_2)$ досягає екстремуму. Це питання розв'язується на підставі вивчення знака диференціала другого порядку d^2L. Оскільки в стаціонарній точці повний диференціал функції $\varphi(x_1, x_2)$ дорівнює нулю, тобто

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 = 0, (dx_1^2 + dx_2^2 \neq 0),$$

і, крім того, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = 0$, то диференціал 2-го порядку функції L дорівнює

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} dx_2^2.$$

Функція $f(x_1, x_2)$ у стаціонарній точці (x_1, x_2, λ) має умовний максимум, якщо в ній $d^2L < 0$, і умовний мінімум, якщо $d^2L > 0$.

Аналогічно знаходиться умовний екстремум функції трьох і більше змінних при існуванні одного або декількох додаткових обмежень (кількість яких повинна бути менше кількості змінних).

Ідея методу множників Лагранжа розв'язування задачі (8.8)–(8.9) у загальному випадку полягає в заміні даної задачі на просту: на знаходження екстремуму складної функції, але без обмежень.

Ця функція називається функцією Лагранжа і задається у вигляді

$$L(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)=f(x_1,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[b_i-\varphi_i(x_1,...,x_n)], \qquad (8.10)$$

де λ_i $(i=\overline{1,m})$ – множники Лагранжа.

Алгоритм методу множників Лагранжа може бути поданий у такому вигляді:

1. Для задачі (8.8) – (8.9) формується функція Лагранжа (8.10).
2. Формується система рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f}{\partial x_j}-\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}=0\ (j=\overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}=b_i-\varphi_i(x_1,...,x_n)=0\ (i=\overline{1,m}). \end{cases} \qquad (8.11)$$

3. У результаті розв'язання системи (8.11) знаходяться всі стаціонарні точки $X^*=(x_1,x_2,...,x_n)$ й $\lambda^*=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$. Оскільки вони визначені з необхідної умови екстремуму, то в них, можливо, досягається максимум або мінімум.

4. Серед стаціонарних точок $X^*=(x_1,x_2,...,x_n)$ функції L вибираються такі, у яких функція f має умовні екстремуми при існуванні обмежень. Цей вибір здійснюється, наприклад, за допомогою достатніх умов екстремуму.

8.4. Опуклі та угнуті функції

Функція $F(X)=F(x_1,...,x_n)$, що задана на опуклій множині M n-вимірного простору, називається ***опуклою*** на цій множині, якщо

$$F(\alpha X_1+(1-\alpha)X_2)\le \alpha F(X_1)+(1-\alpha)F(X_2) \qquad (8.12)$$

для будь-яких точок $X_1, X_2 \in M$ і будь-якого числа $\alpha\in[0,1]$.

Якщо в умові (8.12) змінити знак нерівності $\le$ на $\ge$, то одержимо визначення ***угнутої*** функції. Якщо ж в умові (8.12) нерівність виконується як строга, то функція називається ***строго опуклою*** (або ***строго угнутою***). На рис. 8.1 зображений графік функції однієї змінної, опуклої на всій числовій прямій.

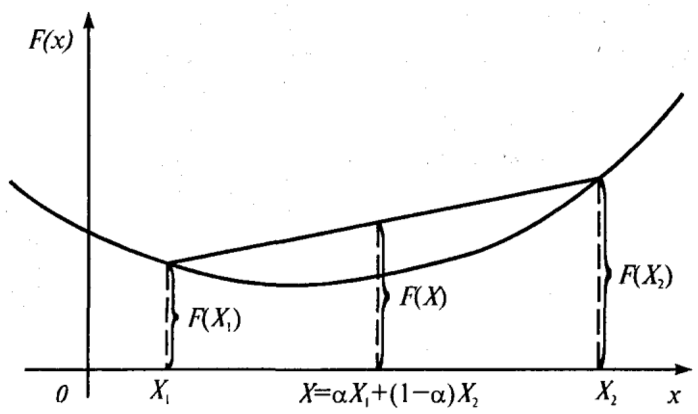

Рисунок 8.1

Алгебраїчні й аналітичні властивості опуклих функцій:

1. Якщо функція $F(X)$ опукла, то функція $-F(X)$ угнута.

2. Функція $F(X) = C$ і лінійна функція $F(X) = ax + b$ є всюди опуклими й усюди вгнутими.

3. Якщо функції $F_i(X)$, $i = 1, ..., m$ опуклі, то при будь-яких дійсних числах $\alpha_i \geq 0$ функція $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i F_i(X)$ також є опуклою.

4. Якщо функція $F(X)$ опукла, то для будь-якого числа a область розв'язків нерівності $F(X) < a$ є або опуклою множиною, або порожньою.

Відзначимо наслідок властивості 4 і теореми про перетин опуклих множин.

5. Якщо функції $\varphi_i(X)$ опуклі при всіх невід'ємних значеннях змінних, то область розв'язків системи нерівностей $\varphi_i(X) \leq b_i, i = 1,..., m$ є опуклою множиною (якщо вона не порожня).

6. Опукла (вгнута) функція, що визначена на опуклій множині M, є безперервною в кожній внутрішній точці цієї множини.

7. Будь-яка диференційована строго опукла (вгнута) функція має не більше однієї стаціонарної точки (тобто точки, у якій дорівнюють нулю всі частинні похідні). При цьому для опуклої (вгнутої) функції стаціонарна точка завжди є точкою локального й глобального мінімуму (максимуму).

8. Двічі диференційована функція $F(X) = F(x_i, ..., x_n)$ є опуклою в тому і тільки в тому випадку, коли

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j \geq 0 \qquad (8.13)$$

для будь-яких $X \in M$ й $\Delta x_i, \Delta x_j$, що не згортаються в нуль одночасно.

Щоб використати цю умову для визначення опуклості конкретної функції, часто буває корисний критерій Сильвестра: умова (8.13) виконується тоді, коли невід'ємні всі головні мінори Δ_k матриці інших частинних похід-них, тобто визначники

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, a_{ij} = \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_i \partial x_j}, k = 1, \dots, n. \qquad (8.14)$$

Якщо всі $\Delta_k > 0$, то нерівність (8.13) виконується як строга, і тоді функція F є строго опуклою.

8.5. Теорема Куна – Таккера

У сучасній теорії пошуку екстремуму опуклих функцій на опуклих множинах класичний метод множників Лагранжа узагальнено. Результатом такого узагальнення є теорема Куна – Таккера. Остання займає центральне місце в теорії нелінійного програмування.

Розглянемо задачу нелінійного програмування, яка може бути розв'язана на основі застосування згаданої вище теореми.

Знайти максимальне значення функції $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

при обмеженнях

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \ (i = \overline{1,m}), \qquad (8.15)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0.$$

При виконанні умови регулярності (існує, принаймні, одна точка X, для якої $g_i(X) > 0$ для всіх i) має місце подана нижче теорема.

Теорема Куна – Таккера

Вектор $X^{(0)} \geq 0$ тоді й тільки тоді є оптимальним розв'язком задачі (8.15), коли існує такий вектор $\lambda^{(0)} \geq 0$, що для всіх $X \geq 0$ і $\lambda \geq 0$ виконується умова

$$L(X,\lambda^{(0)}) \le L(X^{(0)},\lambda^{(0)}) \le L(X^{(0)},\lambda). \qquad (8.16)$$

У нерівності (8.16) $L(X,\lambda)$ – функція Лагранжа, яка сформована для розглянутої задачі і має вигляд

$$L(X,\lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X). \qquad (8.17)$$

Точка $(X^{(0)},\lambda^{(0)})$ називається *сідловою точкою для функції* $L(X,\lambda)$. Оскільки теорема Куна – Таккера встановлює зв'язок між оптимальним планом задачі нелінійного програмування й сідловою точкою функції Лагранжа (8.17), то її ще називають ***теоремою про сідлову точку***.

Якщо функції $f(X)$ й $g_i(X)$ диференційовані, то умова (8.16) еквівалентна таким локальним умовам Куна – Таккера:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_j}\right)_{X^{(0)}\lambda^{(0)}} \le 0,\ x_j^{(0)}\left(\frac{\partial L}{\partial x_j}\right)_{X^{(0)}\lambda^{(0)}} = 0,\ x_j^{(0)} \ge 0\ (j=\overline{1,n}); \qquad (8.18)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}\right)_{X^{(0)}\lambda^{(0)}} \ge 0,\ \lambda_j^{(0)}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}\right)_{X^{(0)}\lambda^{(0)}} = 0,\ \lambda_j^{(0)} \ge 0\ (j=\overline{1,m}). \qquad (8.19)$$

Вираз $\left(\frac{\partial L}{\partial x_j}\right)_{X^{(0)}\lambda^{(0)}}$ означає, що значення часткової похідної функції Лагранжа $L(X,\lambda)$ знаходиться в точці $(X^{(0)},\lambda^{(0)})$, де $X^{(0)} = (x_1^{(0)},...,x_n^{(0)})$, $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)},...,\lambda_n^{(0)})$.

Умови (8.18), (8.19) можуть бути записані у векторній формі в такому вигляді:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_j}\right)_{X^{(0)}\lambda^{(0)}} \le 0,\ X'^{(0)}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}\right)_{X^{(0)}\lambda^{(0)}} = 0,\ X^{(0)} \ge 0; \qquad (8.20)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}\right)_{X^{(0)}\lambda^{(0)}} \ge 0,\ \lambda'^{(0)}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}\right)_{X^{(0)}\lambda^{(0)}} = 0,\ \lambda^{(0)} \ge 0. \qquad (8.21)$$

Примітка: при розв'язуванні задач квадратичного програмування, як правило, застосовуються умови (8.20), (8.21).

Контрольні запитання

1. Опишіть постановку загальної задачі математичного програмування.
2. У чому особливості задач нелінійного програмування і методів їх розв'язання?
3. Наведіть алгоритм графічного методу розв'язання задач нелінійного програмування.
4. Що називається класичною задачею оптимізації?
5. Які необхідні та достатні умови екстремуму функції Лагранжа?
6. Наведіть алгоритм методу множників Лагранжа.
7. Які функції називаються опуклими, угнутими, строго опуклими та строго вгнутими? Назвіть алгебраїчні та аналітичні властивості опуклих функцій.
8. Сформулюйте теорему Куна – Таккера.
9. Як ще називають теорему Куна – Таккера?
10. Коли зручно застосовувати локальні умови Куна – Таккера у векторній формі?

ТЕМА 9. ЗАДАЧІ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

9.1. Постановка задачі квадратичного програмування

Окремою частиною задач опуклого програмування є задачі квадратичного програмування. До них належать задачі, які мають лінійні обмеження, а функціонал являє собою суму лінійної і квадратичної функцій:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + ... + c_{nn}x_n^2 + \\ + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + ... + 2c_{n-1,n}x_{n-1}x_n \to \max; \quad (9.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = \overline{1,m}); \quad (9.2)$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}). \quad (9.3)$$

9.2. Квадратична форма та її властивості

Квадратична функція n змінних називається квадратичною формою і може бути подана у вигляді:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = X^TCX, \quad (9.4)$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X^T = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$,

причому матриця C завжди симетрична, тобто $c_{ij} = c_{ji}$ для всіх $i, j = \overline{1,n}$.

Квадратична форма $Z(X)$ називається X від'ємно визначеною, якщо для всіх X, крім $X = 0$, значення $Z(X) < 0$ (якщо $Z(X) \le 0$, то маємо від'ємно напіввизначену квадратичну форму), у противному разі $Z(X)$ є додатно визначеною (якщо $Z(X) \ge 0$, то маємо додатно напіввизначену квадратичну форму).

Квадратична форма $Z(X)$ називається невизначеною, якщо вона додатна для одних значень X і від'ємна для інших.

Вигляд квадратичної форми можна визначити, використовуючи $\Lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор характеристичних коренів (власних значень) матриці C.

Вектор характеристичних коренів матриці C є вектором, кожна компонента якого задовольняє систему рівнянь вигляду $(C - E\lambda_i)\, X = 0 \ (i = \overline{1,n})$. Система має ненульовий розв'язок, якщо $|C - E\lambda| = 0$. Таке рівняння називається характеристичним рівнянням матриці C і має $\lambda_i \ (i = \overline{1,n})$ коренів, які утворюють вектор Λ:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & \cdots & c_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \ \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (9.5)$$

Теорема. Для того щоб довільна квадратична форма була додатно (від'ємно) визначеною, необхідно і достатньо, щоб усі компоненти вектора характеристичних коренів $\Lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n)^{\mathrm{T}}$ були додатними (від'ємними) значеннями. Якщо хоча б один із характеристичних коренів дорівнює нулю, то квадратична форма є напівдодатною (напіввід'ємною). Якщо корені мають різні знаки, то квадратична форма є невизначеною.

9.3. Метод розв'язування задач квадратичного програмування

Зазначимо, що відомим з теорії аналізу функцій є таке твердження: від'ємно визначена квадратична форма є угнутою, а додатно визначена – опуклою.

Розглянемо випадок від'ємно визначеної квадратичної форми, що входить у цільову функцію задачі квадратичного програмування:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \to \max; \quad (9.6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1,m}); \quad (9.7)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}). \quad (9.8)$$

Оскільки цільова функція задачі є опуклою, а обмеження − лінійними, тобто визначають опуклу множину допустимих розв'язків, то ця задача належить до задач опуклого програмування, для яких справджується твердження, що будь-який локальний максимум є і глобальним. Отже, використовуючи умови теореми Куна – Таккера (8.20), (8.21) для задачі (9.6) − (9.8), отримаємо необхідні та достатні умови оптимальності плану у вигляді такої теореми.

Теорема. Вектор X^* є оптимальним розв'язком задачі квадратичного програмування тоді, і тільки тоді, коли існують такі m-вимірні вектори $\Lambda^* \geq 0, W \geq 0$ і n-вимірний вектор $V \geq 0$, що виконуються умови:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j^*} + v_j = 0, \ (j = \overline{1,n}); \tag{9.9}$$

$$\text{(II)} \qquad v_j \cdot x_j^* = 0, \ (j = \overline{1,n}); \tag{9.10}$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - w_i = 0, \ (i = \overline{1,m}); \tag{9.11}$$

$$\text{(IV)} \qquad w_i \lambda_i^* = 0, \ (i = \overline{1,m}). \tag{9.12}$$

Наведену теорему можна використати для побудови ефективного методу розв'язування задач квадратичного програмування на основі алгоритму симплекс-методу.

Умови (9.9)–(9.12) утворюють стосовно змінних X^*, Λ^*, V, W систему (n + m) рівнянь з 2·(n + m) невідомими.

Умови (9.9) та (9.10) означають, що змінні x_j^*, v_j не можуть одночасно мати додатні значення, тобто входити в базис разом. Якщо деякі k компонент вектора X^* додатні, то відповідні їм компоненти вектора V дорівнюють нулю і лише (n – k) компонент відмінні від нуля (додатні). Отже, разом x_j^*, v_j будуть мати не більш ніж n додатних компонент. З аналогічних міркувань щодо рівності (9.12) випливає, що разом з λ_i^*, w_i буде n + m відмінних від нуля компонент, тобто це може бути базисний розв'язок системи, що утворена умовами (9.9) та (9.11). Для знаходження такого розв'язку можна застосувати симплекс-метод.

Якщо зазначена система рівнянь має допустимий план (він буде єдиним), то оптимальний план відповідної задачі квадратичного програмування також існує.

Розв'язуємо систему рівнянь (9.9) і (9.11) симплекс-методом. Як відомо, спочатку необхідно звести систему обмежень до канонічного вигляду введенням потрібної кількості додаткових та штучних змінних. Для зведення системи до канонічної форми та визначення початкового опорного плану вводимо штучні змінні $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ у рівняння вигляду (9.9), які будуть базисними для першого опорного плану, а змінні $\beta(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$ – у групу рівнянь (9.11), які також дають базисні змінні для початкового плану. Потім для знаходження базисного розв'язку системи (9.9), (9.12) розв'язуємо симплекс-методом таку задачу лінійного програмування:

$$F' = -M\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j + \sum_{i=1}^{m}\beta_i\right) \to \max; \qquad (9.13)$$

за умов:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j^*} + v_j + \alpha_j = 0, \ (j = \overline{1, n}); \\ \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i^*} - w_i + \beta_i = 0 \ (i = \overline{1, m}); \end{cases} \qquad (9.14)$$

$$X^* \geq 0, \Lambda^* \geq 0, V \geq 0, W \geq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0. \qquad (9.15)$$

Якщо у процесі розв'язування задачі (9.13)–(9.15) усі штучні змінні будуть виведені з базису $(\alpha = 0, \beta = 0)$ і разом з цим для знайдених значень змінних X^*, Λ^*, V, W виконуються умови (9.10), (9.12), то знайдений розв'язок є оптимальним планом задачі квадратичного програмування (9.6)–(9.8).

9.4. Градієнтний метод

Градієнтні методи належать до наближених методів розв'язування задач нелінійного програмування і дають лише певне наближення до екстремуму, причому за збільшення обсягу обчислень можна досягти результату з наперед заданою точністю, але в цьому разі є можливість знаходити лише локальні екстремуми цільової функції. Зауважимо, що такі методи можуть бути застосовані лише до тих типів задач нелінійного програмування, де цільова функція і обмеження є диференційованими хоча б один раз. Зрозуміло, що градієнтні методи дають змогу знаходити точки глобального екстремуму тільки для задач опуклого програмування, де локальний і глобальний екстремуми збігаються.

В основі градієнтних методів лежить основна властивість градієнта диференційованої функції – визначати напрям найшвидшого зростання цієї функції. Ідея методу полягає у переході від однієї точки до іншої в напрямку градієнта з деяким наперед заданим кроком.

Розглянемо ***метод Франка − Вульфа***, процедура якого передбачає визначення оптимального плану задачі шляхом перебору розв’язків, які є допустимими планами задачі.

Нехай необхідно відшукати

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \tag{9.20}$$

за лінійних обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = \overline{1, m}); \tag{9.21}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}). \tag{9.22}$$

Припустимо, що X_0 – початкова точка, що належить множині допустимих планів даної задачі. В деякому околі цієї точки нелінійну цільову функцію замінюють лінійною і потім розв’язують задачу лінійного програмування. Нехай розв’язок лінійної задачі дав значення цільової функції F_0, тоді з точки X_0 в напрямку F_0 необхідно рухатись доти, поки не припиниться зростання цільової функції. Тобто у зазначеному напрямку вибирають наступну точку X_1, цільова функція знову замінюється на лінійну, і знову розв’язується задача лінійного програмування.

Розглянемо детальніше перехід від k-ї ітерації методу до $(k + 1)$-ї ітерації.

Припустимо, що є відома точка X_k, яка належить області допустимих розв’язків. У даній точці обчислюємо градієнт цільової функції

$$\nabla f(X_k) = \left(\frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2}; ..., \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \right). \tag{9.23}$$

Значення градієнта функції задає в даній точці напрям найшвидшого її зростання.

Замінюємо цільову функцію задачі лінійною функцією вигляду:

$$F = \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2} \cdot x_2 + ... + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \cdot x_n. \tag{9.24}$$

Потім розв’язуємо задачу лінійного програмування з обмеженнями початкової задачі і новою цільовою функцією:

$$F = \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2} \cdot x_2 + ... + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \cdot x_n \to \max \qquad (9.25)$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = \overline{1, m}); \qquad (9.26)$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}). \qquad (9.27)$$

Нехай розв’язком такої задачі є точка $\widetilde{X}_k$.

З початкової точки X_k у напрямку $\widetilde{X}_k$ рухаємося з деяким довільним кроком $0 \le \lambda \le 1$, визначаючи координати нової точки X_{k+1} у такий спосіб:

$$X_{k+1} = X_k + \lambda(\widetilde{X}_k - X_k). \qquad (9.28)$$

Зауважимо, що значення параметра $0 \le \lambda \le 1$ доцільно вибирати таким, що дає найбільше значення цільової функції вихідної задачі $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Для точки X_{k+1} повторюємо розглянутий процес, для чого знову розраховуємо значення градієнта і т. д. У такий спосіб знаходимо послідовність точок $X_0, X_1, ...$, які поступово наближаються до оптимального плану вихідної задачі. Ітераційний процес повторюється до того моменту, поки значення градієнта цільової функції не стане рівним нулю або виконуватиметься умова $\left| f(X_{k+1}) - f(X_k) \right| < \varepsilon$, де ε – досить мале число, яке означає потрібну точність обчислень.

Контрольні запитання

1. Наведіть формулювання та математичну модель задачі квадратичного програмування.

2. Що таке квадратична форма та які вона має властивості?

3. У чому суть алгоритму симплекс-методу розв’язування задач квадратичного програмування?

4. Сформулюйте теорему про оптимальний розв’язок задачі квадратичного програмування.

5. У чому суть градієнтних методів розв’язування задач нелінійного програмування?

6. Наведіть алгоритм методу Франка – Вульфа.

ТЕМА 10. ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

10.1. Постановка задачі динамічного програмування

Динамічне програмування (ДП) – метод оптимізації, пристосований до операцій, у яких процес прийняття рішення може бути розбитий на етапи (кроки). Такі операції називаються *багатокроковими.* Початок розвитку ДП належить до 50-х років XX ст. Воно пов'язане з ім'ям американського математика Р. Беллмана.

Наведемо *загальну постановку задачі ДП.* Розглядається керований процес. У результаті керування система (об'єкт керування) S переводиться з початкового стану s_0 у стан $\tilde{s}$. Припустимо, що керування можна розбити на n кроків, тобто рішення приймається послідовно на кожному кроці, а керування, що переводить систему S з початкового стану в кінцевий, являє собою сукупність n покрокових керувань.

Позначимо через X_k керування на k-му кроці ($k = 1, 2, ..., n$). Змінні X_k задовольняють деяким обмеженням й у цьому сенсі називаються *припустимими* (X_k може бути числом, точкою в n-вимірному просторі, якісною ознакою).

Нехай X ($X_1, X_2, ..., X_n$) − керування, що переводить систему S зі стану s_0 у стан $\tilde{s}$. Позначимо через s_k стан системи після k-го кроку керування. Одержимо послідовність станів $s_0, s_1, ..., s_{k-1}, s_k, ..., s_{n-1}, s_n = \tilde{s}$, що зобразимо кружками (рис. 10.1).

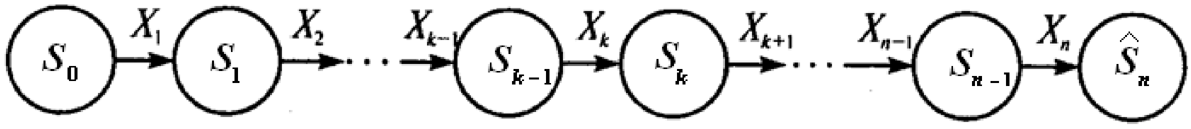

Рисунок 10.1

Показник ефективності розглянутої керованої операції – цільова функція – залежить від початкового стану й керування:

$$Z = F(s_0, X). \tag{10.1}$$

Зробимо кілька припущень:

1. Стан s_k системи наприкінці k-го кроку залежить тільки від попереднього стану s_{k-1} і керування на k-му кроці X_k (і не залежить від попередніх ста-

нів і керувань). Ця вимога називається «відсутністю післядії». Сформульоване положення записується у вигляді рівнянь

$$s_k = \varphi_k(s_{k-1}, X_k);\ k = \overline{1,n}, \qquad (10.2)$$

які називаються *рівняннями станів*.

2. Цільова функція (10.1) є адитивною від показника ефективності кожного кроку. Позначимо показник ефективності k-го кроку через

$$Z_k = f_k(s_{k-1}, X_k),\ k = \overline{1,n}, \qquad (10.3)$$

тоді

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(s_{k-1}, X_k). \qquad (10.4)$$

Задача покрокової оптимізації (задача ДП) формулюється так: *визначити таке припустиме керування X, що переводить систему S зі стану s_0 у стан $\tilde{s}$, при якому цільова функція* (10.4) *набуває найбільшого (найменшого) значення.*

Виділимо особливості моделі ДП:

1. Задача оптимізації інтерпретується як n-кроковий процес керування.

2. Цільова функція дорівнює сумі цільових функцій кожного кроку.

3. Вибір керування на k-му кроці залежить тільки від стану системи до цього кроку, не впливає на попередні кроки (немає зворотного зв'язку).

4. Стан s_k після k-го кроку керування залежить тільки від попереднього стану s_{k-1} і керування X_k (відсутність післядії).

5. На кожному кроці керування X_k залежить від кінцевого числа керуючих змінних, а стан s_k – від кінцевого числа параметрів.

10.2. Принцип оптимальності й рівняння Беллмана

Принцип оптимальності вперше був сформульований Р. Беллманом у 1953 р. Яким би не був стан s системи в результаті будь-якого числа кроків, на найближчому кроці потрібно вибирати керування так, щоб воно в сукупності з оптимальним керуванням на всіх наступних кроках приводило до оптимального виграшу на всіх кроках, що залишилися, включаючи даний.

Беллманом чітко були сформульовані й умови, за яких принцип правильний. Основна вимога – процес керування повинен бути без зворотного зв'язку, тобто керування на даному кроці не повинно впливати на попередні кроки.

Рівняння Беллмана. Замість вихідної задачі ДП із фіксованим числом кроків n і початковим станом s_0 розглянемо послідовність задач: однокрокову, двокрокову й т.д., – використовуючи принцип оптимальності.

Уведемо ряд нових позначень.

Розглянемо n-й крок: s_{n-1} – стан системи до початку n-го кроку, $s_n = \hat{s}$ – кінцевий стан, X_n – керування на n-му кроці, а $f_n(s_{n-1}, X_n)$ – цільова функція (виграш) n-го кроку. Відповідно до принципу оптимальності X_n потрібно вибирати так, щоб для будь-яких станів s_{n-1} одержати максимум цільової функції на цьому кроці.

Позначимо через $Z_n^*(s_{n-1})$ максимум цільової функції – показника ефективності n-го кроку за умови, що до початку останнього кроку система S була в довільному стані s_{n-1}, а на останньому кроці керування було оптимальним. $Z_n^*(s_{n-1})$ називається *умовним максимумом цільової функції* на n-му кроці. Очевидно, що

$$Z_n^*(s_{n-1}) = \max_{\{X_n\}} f_n(s_{n-1}, X_n). \tag{10.5}$$

Максимізація ведеться за всіма припустимими керуваннями X_n.

Рішення X_n, при якому досягається $Z_n^*(s_{n-1})$, також залежить від s_{n-1} і називається умовним оптимальним керуванням на n-му кроці. Воно позначається через $X_n^*(s_{n-1})$. Розв'язавши одновимірну задачу локальної оптимізації за рівнянням (10.5), знайдемо для всіх можливих станів s_{n-1} дві функції: $Z_n^*(s_{n-1})$ і $X_n^*(s_{n-1})$.

Розглянемо тепер двокрокову задачу: приєднаємо до n-го кроку $(n-1)$-й (рис. 10.2).

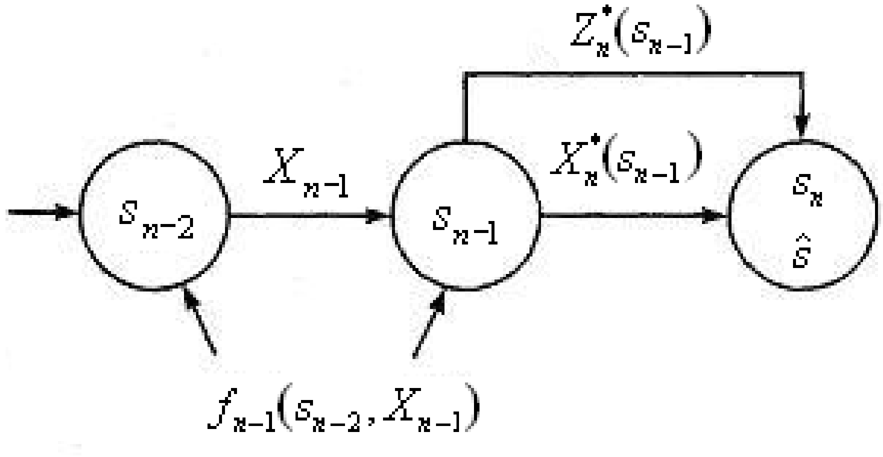

Рисунок 10.2

Умовний максимум цільової функції на (n – 1)-му кроці має вигляд

$$Z_{n-1}^*(s_{n-2}) = \max_{\{X_{n-1}\}} \{ f_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(s_{n-1}) \}. \qquad (10.6)$$

Умовний максимум цільової функції на k-му кроці визначається як

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \max_{\{X_k\}} \{ f_k(s_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^*(s_k) \}. \quad k = n-1-2,...,2,1. \qquad (10.7)$$

Рівняння (10.7) називають ***рівняннями Беллмана***. Процес розв’язування рівнянь (10.5) і (10.7) називається ***умовною оптимізацією***.

Контрольні запитання

1. Наведіть формулювання та математичну модель задачі динамічного програмування.
2. У чому особливості моделі динамічного програмування?
3. Сформулюйте принцип оптимальності Беллмана та його умови.
4. У чому суть рівняння Беллмана?
5. Що називається умовною оптимізацією?
6. Наведіть приклади задач динамічного програмування.

ТЕМА 11. ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ІГОР

11.1. Предмет і задачі теорії ігор. Основні поняття

Однією з основних проблем дослідження операцій є проблема прийняття рішень в умовах невизначеності. Останні належать до умов виконання операцій, дій сторін, що беруть участь в операції, цілей операції.

Отже, основна задача теорії ігор – обґрунтування розв’язку в умовах невизначеності.

При розв’язанні ряду практичних задач дослідження операцій доводиться аналізувати ситуації, у яких зіштовхуються інтереси двох і більше сторін. Такі ситуації називаються *конфліктними.* Необхідність аналізу таких ситуацій привела до створення математичної теорії конфліктних операцій, яка називається ***теорією ігор***.

Математична модель конфліктної ситуації називається грою, сторони, що беруть участь у конфлікті, – *гравцями,* а результат конфлікту – *виграшем.* Для кожної формалізованої гри вводяться *правила*, тобто система умов, що визначає: 1) варіанти дій гравців; 2) обсяг інформації кожного гравця про поводження партнерів; 3) виграш, до якого приводить кожна сукупність дій. Як правило, виграш (або програш) може бути заданий кількісно, наприклад, можна оцінити програш нулем, виграш – одиницею, а нічию – 1/2.

Гра називається *парною*, якщо в ній беруть участь два гравці, і *множинною*, якщо число гравців більше двох. Ми будемо розглядати тільки парні ігри. У них беруть участь два гравці A і B, інтереси яких протилежні, а під грою будемо розуміти ряд дій з боку A і B.

Гра називається *грою з нульовою сумою*, або *антагоністичною*, якщо виграш одного із гравців дорівнює програшу іншого, тобто для повного завдання гри досить указати величину одного з них. Якщо позначити a – виграш одного із гравців, b – виграш іншого, то для гри з нульовою сумою $b = -a$, тому досить розглядати, наприклад a.

Вибір і здійснення однієї з передбачених правилами дій називається *ходом* гравця. Ходи можуть бути особистими й випадковими. *Особистий хід* – це свідомий вибір гравцем однієї з можливих дій (наприклад, хід у шаховій грі). *Випадковий хід* – це випадково обрана дія (наприклад, вибір карти з перетасованої колоди). Надалі ми будемо розглядати тільки особисті ходи гравців.

Стратегією гравця називається сукупність правил, що визначають вибір його дії при кожному особистому ході залежно від сформованої ситуації. Гра називається *кінцевою,* якщо в кожного гравця є кінцеве число стратегій, і *нескінченною* – у протилежному випадку.

Змішана стратегія – це стратегія, в якій окремі «чисті» стратегії чергуються випадковим чином з деякими ймовірностями.

Для того щоб *розв'язати* гру, або знайти розв'язок гри, треба для кожного гравця вибрати стратегію, що задовольняє умову *оптимальності*, тобто один із гравців повинен одержувати *максимальний виграш,* коли другий дотримується своєї стратегії. У той же час другий гравець повинен мати *мінімальний програш,* якщо перший дотримується своєї стратегії. Такі *стратегії* називаються *оптимальними*. Оптимальні стратегії повинні також задовольняти умову *стійкості,* тобто кожному із гравців повинно бути невигідним відмовитися від своєї стратегії в цій грі.

Якщо гра повторюється досить багато разів, то гравців може цікавити не виграш і програш у кожній конкретній партії, а *середній виграш (програш)* – у всіх партіях.

Отже, ***метою*** *теорії ігор є визначення оптимальної стратегії кожного гравця, а її* ***предметом*** *– гра.*

11.2. Платіжна матриця. Нижня й верхня ціна гри

Розглянемо парну скінченну гру. Нехай гравець A має m особистих стратегій, які позначимо $A_1, A_2, ..., A_m$. Нехай у гравця B є n особистих стратегій, позначимо їх $B_1, B_2, ..., B_n$. Говорять, що гра має розмірність m х n. У результаті вибору гравцями будь-якої пари стратегій

$$A_i \text{ і } B_j \ (i = 1, 2, ..., m, j = 1,2, ..., n)$$

однозначно визначається результат гри, тобто виграш a_{ij} гравця A (позитивний або негативний) і програш ($-a_{ij}$) гравця B. Припустимо, що значення a_{ij} відомі для будь-якої пари стратегій (A_i, B_j). Матриця $P = (a_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n$, елементами якої є виграші, що відповідають стратегіям A_i й B_j, називається *платіжною матрицею,* або *матрицею гри.* Загальний вигляд такої матриці поданий у табл. 11.1.

Таблиця 11.1

A_j	B_i			
	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	$a_{1\mathrm{n}}$
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Рядки цієї таблиці відповідають стратегіям гравця A, а стовпці − стратегіям гравця B.

Розглянемо гру m х n з матрицею $P = (a_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ... n$, і визначимо найкращу серед стратегій A_1, A_2 ..., A_m. Вибираючи стратегію A_i, гравець A повинен розраховувати, що гравець B відповість на неї тією зі стратегій B_j, для якої виграш для гравця A мінімальний (гравець B прагне «нашкодити» гравцеві A).

Позначимо через α_{i} найменший виграш гравця A при виборі ним стратегії A_i для всіх можливих стратегій гравця B (найменше число в i-му рядку платіжної матриці), тобто

$$\min_{j=1,\dots,n} a_{ij} = \alpha_i . \tag{11.1}$$

Серед усіх чисел α_i ($i = 1, 2, ..., m$) виберемо найбільше $\alpha = \max\limits_{i=1,\dots,m} \alpha_i$. Назвемо α нижньою ціною гри, або максимальним виграшем (максиміном). Це гарантований виграш гравця A при будь-якій стратегії гравця B. Отже,

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} . \tag{11.2}$$

Стратегія, що відповідає максиміну, називається максимінною стратегією. Гравець B зацікавлений у тому, щоб зменшити виграш гравця A, вибираючи стратегію B_j, він ураховує максимально можливий при цьому виграш для A. Позначимо

$$\beta_j = \max_i a_{ij} . \tag{11.3}$$

Серед усіх чисел β_j виберемо найменше $\beta = \min\limits_{j=1,\dots,n} \beta_j$ й назвемо β верхньою ціною гри, або мінімаксним виграшем (мінімаксом). Це гарантований програш гравця B. Отже,

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}. \quad (11.4)$$

Стратегія, що відповідає мінімаксу, називається *мінімаксною стратегією.*

Фактично виграш гравця A при розумних діях гравців обмежений нижньою й верхньою цінами гри. Якщо вирази рівні, тобто

$$\alpha = \beta \text{ або } \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v, \quad (11.5)$$

то гра називається *грою із сідловою точкою*, а число v – *ціною гри*.

Елемент $a_{i_0 j_0} = v$ у матриці гри є одночасно мінімальним у рядку i_0 і максимальним у стовпці j_0 та називається *сідловою точкою*.

11.3. Методи розв'язування скінченної гри без сідлової точки

Серед скінченних ігор, що мають практичне значення, ігри із сідловою точкою зустрічаються рідко. Більш типовим є випадок, коли $\alpha \neq \beta$. Такі ігри називаються іграми без сідлової точки.

Розглянемо скінченну гру mxn, платіжна матриця якої подана в табл. 8.1. У таких іграх, скоріш за все, $\alpha < \beta$. Якщо кожному гравцеві дати можливість вибору однієї чистої стратегії, то цей вибір повинен визначатися принципом мінімакса. При цьому гравець A гарантує собі виграш рівний α, а гравець B – програш β. Для кожного гравця природним є питання збільшення виграшу (зменшення програшу). Пошуки такого рішення полягають у тому, що гравці застосовують не одну, а кілька стратегій. Вибір стратегій здійснюється випадковим чином. Тобто гравці вибирають змішані стратегії.

У гри, матриця якої має розмірність m х n, стратегії гравця A задаються наборами ймовірностей $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$, з якими гравець застосовує свої початкові чисті стратегії. Ці набори можна розглядати як m-вимірні вектори, для компонентів яких виконуються умови

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0\ (i = \overline{1,m}). \quad (11.6)$$

Аналогічно стратегії гравця B задаються наборами ймовірностей $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, з якими гравець застосовує свої початкові чисті стратегії. Ці набори можна розглядати як n-вимірні вектори, для компонентів яких виконуються умови:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1;\ y_j \geq 0\ (j = \overline{1,n}). \qquad (11.7)$$

Стратегії гравців A і B, для яких імовірності x_i й y_i відрізняються від нуля, називаються *активними*.

Виграш гравця A при використанні змішаних стратегій визначається як математичне очікування виграшу, тобто дорівнює $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ або (у векторно-матричному записі) XAY'.

Має місце так названа ***основна теорема теорії ігор***, що полягає в наступному: кожна кінцева гра має, принаймні, один розв'язок в області змішаних стратегій.

Застосування оптимальної стратегії в розглянутій задачі дозволяє одержати виграш, що дорівнює ціні гри:

$$\alpha \leq v \leq \beta.$$

Для оптимальних стратегій гравців має місце співвідношення

$$\max_X \min_Y XAY' = \min_Y \max_X XAY'.$$

Спрощення ігор

Загалом кажучи, задача розв'язання гри, якщо її матриця не містить сідлової точки, тим складніша, чим більше значення m й n. Тому в теорії матричних ігор розглядаються способи, за допомогою яких розв'язки одних ігор зводяться до розв'язків інших, більш простих (наприклад, за допомогою скорочення розмірності матриці). Скоротити розмірність матриці можна, виключивши дублюючі й заздалегідь невигідні стратегії.

Дублюючими називаються стратегії, яким відповідають однакові значення елементів у платіжній матриці, тобто якщо в платіжній матриці містяться однакові рядки або стовпці.

Якщо всі елементи i-го рядка матриці менше відповідних елементів k-го рядка, то i-а стратегія для гравця A називається *заздалегідь невигідною*. Або якщо елементи r-го стовпця матриці більше відповідних елементів j-го стовпця, то для гравця B стратегія B_r заздалегідь невигідна.

11.4. Зведення матричної гри без сідлової точки до задачі лінійного програмування

Розглянемо скінченну гру без сідлової точки, платіжна матриця якої подана в табл. 11.1. Оскільки платіжна матриця не містить сідлової точки, то розв'язок гри подається у змішаних стратегіях:

$$X = (x_1, x_2, ..., x_m); Y = (y_1, y_2, ..., y_n).$$

Застосування гравцем *A* оптимальної стратегії $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ має забезпечити йому при будь-яких діях гравця *B* виграш не менше ціни гри *v*. Тому при оптимальній стратегії гравця *A* повинна виконуватися умова

$$\sum_{i=1}^{m} x_i * a_{ij} \ge v \; (j = \overline{1,n}).$$

Аналогічно для гравця *B* оптимальна стратегія $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ має забезпечити йому при будь-яких діях гравця *A* програш, що не перевищує величину *v*. Тому при оптимальній стратегії гравця *B* повинна виконуватися умова

$$\sum_{j=1}^{n} y_j * a_{ij} \le v \; (i = \overline{1,m}).$$

Сформульована задача може бути розглянута як задача знаходження оптимальної стратегії гравця *A*, для якої виконуються наступні обмеження:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \ge v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \ge v, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \ge v. \end{cases} \qquad (11.8)$$

Величина *v* (ціна гри) невідома, однак можна вважати, що $v > 0$.

Перетворимо систему обмежень (11.8), розділивши всі члени нерівностей на *v*. У результаті одержимо

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m1}t_m \ge 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{m2}t_m \ge 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \ge 1, \end{cases} \qquad (11.9)$$

де

$$t_i = \frac{x_i}{v} \; (i = \overline{1,m}). \qquad (11.10)$$

З умов $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0\ (i = \overline{1,m})$ і виразів (11.10) випливає, що

$$t_1 + t_2 + ... + t_m = \frac{1}{v}. \qquad (11.11)$$

Розв'язок гри повинен максимізувати значення v, а тобто, із урахуванням (11.11) функція $Z = \sum_{i=1}^{m} t_i$ має набути мінімального значення. Таким чином, розглянута задача теорії ігор зводиться до наступної задачі лінійного програмування:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} t_i \to \min \qquad (11.12)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{m2}t_m \geq 1, \\ .... \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1. \end{cases} \qquad (11.13)$$

$$t_i \geq 0\ (i = \overline{1,m}). \qquad (11.14)$$

Невід'ємність змінних $t_i \geq 0\ (i = \overline{1,m})$ випливає з (11.10). Розв'язання ЗЛП (11.12) – (11.14) дозволяє знайти оптимальні значення t_i й величину $\frac{1}{v}$. Це у свою чергу надає можливість знайти значення $x_i = vt_i\ (i = \overline{1,m})$, які визначають оптимальну стратегію $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ гравця A.

За аналогією для знаходження стратегії гравця B треба врахувати умову $\sum_{j=1}^{n} y_j * a_{ij} \leq v\ (i = \overline{1,m})$. Її врахування дозволяє звести задачу про пошук стратегії гравця B до наступної ЗЛП:

$$W = \sum_{j=1}^{n} u_j \to \max \qquad (11.15)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1n}u_n \leq 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{2n}u_n \leq 1, \\ .... \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + ... + a_{mn}u_n \leq 1. \end{cases} \qquad (11.16)$$

$$u_j \geq 0 \; (j = \overline{1,n}). \qquad (11.17)$$

У ЗЛП (11.15) – (11.17)

$$u_j = \frac{y_j}{v} \; (j = \overline{1,n}).$$

Таким чином, розв’язок сформульованої гри зводиться до розв’язання пари двоїстих симетричних ЗЛП. Використовуючи властивість симетричності, можна розв’язати одну з них, а саме ту, для якої потрібно менше обчислень, а розв’язок іншої задачі знайти на основі співвідношень двоїстості.

Контрольні запитання

1. Що називається теорією ігор, у чому полягає її основна задача?
2. Розкрийте сутність основних понять теорії ігор.
3. Наведіть класифікацію ігор і стратегій гравців.
4. Що таке платіжна матриця, нижня та верхня ціна гри?
5. Які є методи розв’язування скінченної гри без сідлової точки?
6. Сформулюйте основну теорему теорії ігор.
7. Які є способи спрощення ігор?
8. Як можна звести матричну гру без сідлової точки до задачі лінійного програмування?

ТЕМА 12. ВИБІР КРИТЕРІЮ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

12.1. Особливості прийняття рішення в умовах невизначеності

Особливе місце в теорії ігор займають ігри проти природи, які ще називаються ***прийняттям рішень в умовах невизначеності***. Природа хоча й робить випадкові ходи, але не є зловмисним гравцем, тому що вона не має розуму та не прагне зробити якнайгірше своєму супротивникові. Тому й ухвалення рішення в такій ситуації має свої особливості.

Розглянемо гру із природою: у нас (сторона A) є m можливих стратегій A_1, A_2, ..., A_m, що стосується обставин, то про них можна зробити n припущень: S_1, S_2, ..., S_n. Розглянемо їх як «стратегії природи». Наш виграш a_{ij} при кожній парі стратегій A_i, S_j заданий матрицею (табл. 12.1).

Таблиця 12.1

A_i	S_j			
	S_1	S_2	...	S_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Потрібно вибрати таку стратегію гравця A (чисту або, можливо, змішану, якщо це здійсненно), що є більш вигідною в порівнянні з іншими.

Ухвалення рішення в умовах невизначеності полягає в тому, що імовірнісний розподіл, який відповідає стану природи, або невідомий, або дані недостатньо достовірні.

Недолік методу прийняття рішень в умовах невизначеності обумовлює прийняття декількох критеріїв.

12.2. Критерій Лапласа

Розглядається принцип недостатності інформації, суть якого полягає в тому, що жодному з розподілів не дається переваги. Крім того, всі стани природи є рівноймовірними:

$$P(S_1) = P(S_2) = \ldots = P(S_n) = 1/n.$$

Тоді, якщо a_{ij} – *прибуток,* то $\alpha = \max\limits_i \left\{ \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}$, (12.1)

а якщо a_{ij} – *витрати*, то $\alpha = \min\limits_i \left\{ \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}$. (12.2)

12.3. Критерій Вальда (мінімаксний або максимінний критерій)

Цей критерій ґрунтується на консервативному обережному поводженні особи, що приймає рішення, й зводиться до вибору найкращої альтернативи з гірших.

Тоді, якщо a_{ij} – *прибуток*, то $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$, (12.3)

а якщо a_{ij} – *витрати*, то $\alpha = \min\limits_i \max\limits_j a_{ij}$. (12.4)

12.4. Критерій Севіджа

Критерій полягає в тому, що він прагне пом'якшити консерватизм критерію Вальда.

$$C = \min_i \max_j r_{ij}, \quad (12.5)$$

де r_{ij} – це ризик гравця A при користуванні стратегією A_i в умовах S_j:

якщо a_{ij} – *прибуток*, то $r_{ij} = \max\limits_i a_{ij} - a_{ij}$, (12.6)

якщо a_{ij} – *витрати,* то $r_{ij} = a_{ij} - \min\limits_i a_{ij}$. (12.7)

12.5. Критерій Гурвіца

Цей критерій рекомендує при ухваленні рішення не керуватися ні крайнім песимізмом («завжди розраховуй на гірше!»), ні крайнім, легковажним оптимізмом. Згідно з цим критерієм вибирається стратегія з умови:

а) прибуток $H = \max\limits_j \left\{ \chi \max a_{ij} + (1-\chi) \min a_{ij} \right\}$; (12.8)

б) витрати $H = \min\limits_i \left\{ \chi \min a_{ij} + (1-\chi) \max a_{ij} \right\}$, (12.9)

де χ – «коефіцієнт оптимізму», що обирається між нулем та одиницею.

При $\chi = 1$ критерій Гурвіца перетворюється в критерій Вальда, при $\chi = 0$ − у критерій «крайнього оптимізму», що рекомендує вибрати ту стратегію, при якій найбільший виграш у рядку максимальний. Найбільш оптимальний $\chi = 0{,}5$.

12.6. Загальні рекомендації щодо вибору критерію для прийняття рішення

Обрання критерію прийняття рішень є найбільш складним і відповідальним етапом у математичному моделюванні в економіці та менеджменті.

У роботі В.Я. Кутковецького [23] наведено загальні рекомендації або поради, за якими обрання критерію повинен підтвердити «Замовник» (на найвищому рівні), і треба максимально узгодити це обрання зі специфікою задачі, з наявними ресурсами та зі своєю метою. Задачею «Виконавця» є створення умов об'єктивності в оціненні стратегічних напрямів за визначеними «Замовником» умовами:

1. Зокрема, якщо навіть *мінімальний ризик неприпустимий*, то потрібно використовувати *критерій Вальда*.

2. Якщо *ризик припустимий* і «Замовник» має намір вкласти стільки коштів, щоб потім не шкодувати, то обирають *критерій Севіджа*.

З цими особливостями потрібно ознайомити «Замовника».

Контрольні запитання

1. У чому особливості прийняття рішення в умовах невизначеності? Наведіть постановку задачі гри з природою.

2. Розкрийте суть критерію Лапласа.

3. Сформулюйте критерії Вальда та Севіджа. У чому їх зв'язок?

4. Що таке критерій Гурвіца?

5. У чому полягають загальні рекомендації щодо вибору критерію для прийняття рішення?

6. Наведіть приклади задач гри з природою.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Білоцерківський О. Б. Економіко-математичне моделювання : текст лекцій / О. Б. Білоцерківський, Н. В. Ширяєва, О. О. Замула. – Харків : НТУ «ХПІ», 2010. – 108 с.

2. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Економіко-математичне моделювання» для студентів спеціальностей 7.050206 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності» та 6.030508 «Фінанси» / О. Б. Білоцерківський, Н. В. Ширяєва. – Харків : НТУ «ХПІ», 2009. – 76 с.

3. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Економіко-математичне моделювання» для студентів спеціальності 6.03060101 «Менеджмент організацій» / О. Б. Білоцерківський, Н. В. Ширяєва. – Харків : НТУ «ХПІ», 2015. – 87 с.

4. Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Математичне моделювання в економіці та менеджменті» для студентів спеціальностей 6.03060101 «Менеджмент організацій і адміністрування» та 6.03060104 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності» / О. Б. Білоцерківський, Н. В. Ширяєва. – Харків : НТУ «ХПІ», 2015. – 60 с.

5. Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу «Економіко-математичне моделювання» : для студ. спец. 6.03060101 «Менеджмент організацій» та 6.03060102 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності» / О. Б. Білоцерківський. – Харків : НТУ «ХПІ», 2012. – 39 с.

6. Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу «Математичне моделювання в економіці та менеджменті» для студентів спеціальностей 6.03060101 «Менеджмент організацій і адміністрування» та 6.03060104 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності» / О. Б. Білоцерківський. – Харків : НТУ «ХПІ», 2015. – 48 с.

7. Білоцерківський О. Б. Економетрія : навч.-метод. посіб. / О. Б. Білоцерківський, Н. В. Ширяєва. – Харків : НТУ «ХПІ», 2008. – 80 с.

8. Удосконалення економічної оцінки енергозаощадження : монографія / за заг. ред. О. М. Гаврися. – Харків : «Цифрова типографія №1», 2012. – 175 с.

9. Оптимізація систем теплопостачання із використанням економіко-математичного моделювання : монографія / за заг. ред. О. М. Гаврися. – Харків : «Щедра садиба плюс», 2015. – 208 с.

10. Білоцерківський О. Б. Оптимізація прибутку при районуванні сільськогосподарських культур / О. Б. Білоцерківський, О. О. Замула // Вісник Харк. нац. техн. ун-та сільського госп-ва ім. Петра Василенка. Економічні науки. – Харків : ХНТУСГ, 2010. – Вип. 105. – С. 174–178.

11. Білоцерківський О. Б. Задача розподілу інвестицій в динамічному програмуванні / О. Б. Білоцерківський // Стратегії інноваційного розвитку економіки України : проблеми, перспективи, ефективність : матеріали щорічної Міжнар. Internet-конф. студ. та молодих вчених, 10 грудня 2010 р. – Харків : НТУ «ХПІ», 2010. – С. 274–276.

12. Білоцерківський О. Б. Використання економіко-математичного моделювання в електроенергетиці України / О. Б. Білоцерківський // Вісник НТУ «ХПІ» : зб. наук. пр. Темат. вип. : Актуальні проблеми управління та фінансово-господарської діяльності підприємства. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2011. – № 61. – С. 8–12.

13. Белоцерковский А. Б. Применение линейного программирования для решения оптимизационных задач в электроэнергетике Украины / А. Б. Белоцерковский, А. А. Замула // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-25 : сб. тр. 25-й Междунар. науч. конф. : в 10 т. / ред. А. А. Большаков. – Волгоград ; Харьков : ВГТУ ; НТУ «ХПИ», 2012. – Т. 1, секция 1, 2. – С. 101–104.

14. Білоцерківський О. Б. Аналіз та вдосконалення економіко-математичних моделей оптимізації витрат в електроенергетиці / О. Б. Білоцерківський // Інформаційні складові сучасних підходів до управління економікою : міжнар. кол. монографія / ред. Л. М. Савчук. – Донецьк : ЛАНДОН-ХХІ, 2013. – Розд. 5. – С. 367–378.

15. Білоцерківський О. Б. Аналіз чутливості економіко-математичної моделі стабілізації існуючих тарифів на теплову енергію / О. Б. Білоцерківський // Актуальні напрямки розвитку національної економіки та господарського законодавства України : зб. тез доп. 1-ї Всеукраїнської студ. конф., 18 квітня 2013 р. – Харків : «Бета», 2013. – С. 6–8.

16. Білоцерківський О. Б. Аналіз економіко-математичних моделей оптимізаційних задач у теплоенергетиці та їх удосконалення / О. Б. Біло-

церківський // Кримський економічний вісник. – 2014. – № 3 (10) червень 2014. – С. 6–9.

17. Білоцерківський О. Б. Використання економіко-математичного моделювання для оптимізації систем теплопостачання / О. Б. Білоцерківський // Соціально-економічний розвиток країн: досвід та перспективи : матер. Міжнар. наук.-практ. конф., 30–31 травня 2014 р. : у 3 ч. Ч. 2. – Львів : ЛЕФ, 2014. – С. 82–85.

18. Білоцерківський О. Б. Оптимізаційне моделювання у теплоенергетиці / О. Б. Білоцерківський // Дослідження та оптимізація економічних процесів : кол. монографія / за ред. О. В. Манойленко. – Харків : ТОВ «Щедра садиба плюс», 2014. – Розд. 2. – С. 122–131.

19. Білоцерківський О. Б. Особливості економіко-математичного моделювання систем теплопостачання / О. Б. Білоцерківський // Ефективне управління економікою: процеси, явища, ризики : матер. Міжнар. наук.-практ. конф., 13–14 червня 2014 р. – Черкаси : ВД «Гельветика», 2014. – С. 237–239.

20. Білоцерківський О. Б. Сучасні проблеми і методи математичного і комп'ютерного моделювання в економіці та менеджменті / О. Б. Білоцерківський // Вісник НТУ «ХПІ» : зб. наук. пр. Темат. вип. : Актуальні проблеми управління та фінансово-господарської діяльності підприємства. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2014. – № 23 (1066). – С. 96–100.

21. Боровік О. В. Дослідження операцій в економіці : навч. посіб. / О. В. Боровік, Л. В. Боровік. – Київ : Центр навчальної літератури, 2007. – 424 с.

22. Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. – М. : ЮНИТИ, 2006. – 407 с.

23. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій : навч. посіб. / В. Я. Кутковецький. – Київ : Видавничий дім «Професіонал», 2004. – 350 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ Олександр Борисович

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЕКОНОМІЦІ ТА МЕНЕДЖМЕНТІ

Текст лекцій

для студентів спеціальності 073 «Менеджмент»

Роботу до видання рекомендував проф. В. А. Міщенко

Редактор О. І. Шпільова

План 2018 р., п. 52

Підп. до друку __.__.18. Формат $60\times 84\ ^1/_{16}$. Папір офсет.

Друк - ризографія. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 5,23.

Наклад 50 прим. Зам № . Ціна договірна

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Віддруковано в ТОВ «Друкарня Мадрид».

61024, Харків, вул. Максиміліанівська, 11. Тел.: (057) 756-53-25